

动态非完整控制系统的指数镇定及其在一类车式机器人中的应用

董文杰 霍伟

(北京航空航天大学第七研究室 100083)

摘要 本文研究了用动力学方程表示的双输入链式非完整系统的镇定问题,设计出了非连续的指数镇定律,并将其用于一类移动机器人的位姿镇定中,仿真结果表明了该控制律的有效性。

关键词 非完整控制, 链式系统, 移动机器人

1 引言

近年来,受非完整约束的非线性控制系统(简称非完整控制系统)受到越来越多的重视,得到日益广泛的研究.非完整系统是可控的非线性系统,但其线性化系统不可控,线性系统及基于反馈线性化的非线性控制系统的许多设计方法不能直接用于非完整系统,使其控制设计问题变得非常困难;另一方面,作为一类非线性系统,它又具有一定的特殊性,使我们能够进行有针对性的研究,得出较好的结果。

非完整链式系统^[1]是非完整控制系统中重要的一类,最简单的一类链式系统(单链单生成元)表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, & \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_j = x_{j-1}u_1, & (3 \leq j \leq n) \end{cases} \quad (1)$$

其中状态 x_1, \dots, x_n 和输入 u_1, u_2 属于 R . 因为此类方程来源于系统的运动学方程, 其中的控制量 u_1 和 u_2 为广义速度, 故称为速度控制. 近年来这类系统被广泛研究, 得出了一些结果. 它是可控的, 但不满足 Brockett 存在光滑状态反馈镇定律的必要条件^[2], 因此已有的以光滑状态反馈为主的理论结果不能用于此类系统. 为克服这个障碍, 人们提出了几种不同的设计方法, 如时变状态反馈, 非连续反馈^[3]和混合控制等. (1) 式仅仅描述了系统的运动学特性, 但实际系统是动力学系统, 系统的控制量是施加的广义力而不是广义速度, 故(1)式的控制很难直接用于实际系统的控制, 因而必须讨论以广义力为控制的动力学方程. 现有研究非完整动力学系统控制问题的文章不多, 因此有必要加强这方面的研究. 与(1)式相对应的以广义力为控制量的动力学方程是扩展链式非完整系统, 其方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, & \dot{u}_1 = v_1 \\ \dot{u}_2 = v_2, & \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_j = x_{j-1}u_1, & (3 \leq j \leq n) \end{cases} \quad (2)$$

其中 $x_1, u_1, u_2, x_2, \dots, x_n$ 是状态, v_1, v_2 是输入.

本文研究系统(2)的反馈镇定问题,把文[3]中镇定运动学方程(1)的设计思路应用到镇定动力学方程(2)的设计中. 得出的非连续镇定律结构上与文[3]中控制律相似,但它不能由运

动力学控制律的简单推广得到. 事实上文[3]中控制律的简单推广要求的初始条件比本文强而且闭环系统状态的收敛速度不如本文中的快. 作为该设计方法的应用, 本文设计了一类移动机器人的反馈镇定律, 仿真结果表明了所提出设计方法的有效性.

2 扩展链式非完整系统指数镇定律的设计

对系统(2)有如下引理.

引理 若微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, & \dot{u}_1 = -k u_1 \\ \dot{u}_2 = p_1 u_2 + p_2 x_2 + p_3 \frac{x_3}{u_1} + \dots + p_n \frac{x_n}{u_1^{n-2}} \\ \dot{x}_2 = u_2, & \dot{x}_j = x_{j-1} u_1, \quad (3 \leq j \leq n) \end{cases} \quad (3)$$

满足初始条件

$$x_1(0) = 0, \quad u_1(0) = 0, \quad -\frac{u_1(0)}{x_1(0)} = k \quad (4)$$

记 $z^0(t) = [x_1(t), u_1(t) \mid u_2(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)]^T = [z^1(t) \mid z^2(t)]^T$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \dots & p_{n-2} & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2k & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & (n-3)k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & (n-2)k \end{pmatrix} \quad (5)$$

则对所有 $t \geq 0$, (3) 式有唯一解

$$z_1(t) = z_1(0) \exp(-kt) \quad (6)$$

$$z_2(t) = \Gamma(t) \exp(\Lambda t) \Gamma^{-1}(0) z_2(0) \quad (7)$$

其中 $\Gamma(t) = \text{diag}[1, 1, u_1(t), \dots, u_1^{n-2}(t)]$.

证明 注意到(4)式所表示的初始条件及 k 值的选取, 易知(3)式前两式的解为(6)式. 从而知 $u_1(t) > 0 (\forall t \geq 0)$, 故(3)式的后 $n-2$ 式满足微分方程解的存在唯一性条件, 因而它有唯一解. 取全局同胚变换 $\xi = \Gamma^{-1}(t) z_2(t)$, 则由(3)-(4)式知 $\dot{\xi} = \Lambda \xi$, $\xi(0) = \Gamma^{-1}(0) z_2(0)$, 所以其解为 $\xi(t) = \exp(\Lambda t) \xi(0) (t \geq 0)$, 取逆变换后即知(7)式成立.

根据引理, 有如下命题.

命题 若系统(2)满足初始条件(4), 且 $k = -\frac{u_1(0)}{x_1(0)} > 0$, 选取 p_1, p_2, \dots, p_n 使得 Λ 的谱位于复开左半平面(即 $\sigma(\Lambda) \subset C^-$), 则非连续控制律

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} -k u_1 \\ p_1 u_2 + p_2 x_2 + p_3 \frac{x_3}{u_1} + \dots + p_n \frac{x_n}{u_1^{n-2}} \end{bmatrix}, & \text{若 } u_1 > 0 \\ [0, 0]^T, & \text{若 } u_1 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

可使闭环系统的状态指数趋于零.

证明 根据引理中的(6)式, $k > 0$ 时 $x_1(t)$ 和 $u_1(t)$ 指数趋于零, 且当 $t \geq 0$ 时, $\Gamma(t)$ 和

$\Gamma^{-1}(0)z_2(0)$ 有界, 故当 Λ 的谱位于复开左半平面时, 由(7)式知 $u_2(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 均指数趋近于零.

注1 命题中要求 $\frac{u_1(0)}{x_1(0)} < 0$, 而实际上一般 $u_1(0) = 0, x_1(0) > 0$. 要使 $u_1(0) < 0$, 即使机器人先“运动”起来, 这个要求并不苛刻. 事实上, 若 $u_1(t) < 0(t > 0)$, 无论如何选取 v_2 都不能镇定系统到原点, 除非 $x_1(0), u_2(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$ 全为零. 当 $x_1(0) > 0$ 且 $u_1(0) = 0$ 时, 在使用控制律(8)前先在较短时间内用如下简单控制: $v_1 = -\alpha x_1(0) (\alpha > 0), v_2 = 0$, 即可使命题初始条件得到满足. 对于不满足命题条件的初始状态 $x_1(0)$ 和 $u_1(0)$ 的其他情况, 均可类上处理. 关于放宽初始条件限制及初始条件不精确满足(4)式时对闭环系统造成的影响, 将另文研究.

注2 对于任何固定的 k , 总可选取适当的 p_1, \dots, p_n 使 $\sigma(\Lambda) \subset C^-$. 当 $k = -\frac{u_1(0)}{x_1(0)}$ 固定时, 对任取一组期望的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in C^-$, 令 $|N - \Lambda| = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$, 依次比较两边 $\lambda^{n-1}, \dots, \lambda^1, \lambda^0$ 前面的系数, 即可唯一计算出 p_1, p_2, \dots, p_n .

注3 由命题证明易知, 控制信号 v_1 和 v_2 有界且均指数趋于零.

注4 在命题中若取非连续控制律

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} -2ku_1 - k^2x_1 \\ p_1u_2 + p_2x_2 + p_3\frac{x_3}{u_1} + \dots + p_n\frac{x_n}{u_1^{n-2}} \end{bmatrix}, & \text{若 } u_1 < 0 \\ [0, 0]^T, & \text{若 } u_1 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

结论仍然成立. 二者的区别是当 $k > 0$ 但 $k < -\frac{u_1(0)}{x_1(0)}$ 时, 使用控制律(8), 除了状态 x_1 有静差外, 其他各状态均指数趋于零; 但若使用控制律(9), 状态 x_1 和 u_1 指数趋于零而其他状态可能不稳定.

注5 命题中若取如下控制律

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} -ku_1 \\ p_1u_2 + p_2x_2 + p_3\frac{x_3}{u_1} + \dots + p_n\frac{x_n}{u_1^{n-2}} \end{bmatrix}, & \text{若 } |u_1| > \epsilon \\ [0, 0]^T, & \text{若 } |u_1| \leq \epsilon \end{cases} \quad (10)$$

其中正数 $\epsilon \ll |x_1(0)|$, 则可保证闭环系统的状态是最终一致有界的.

3 一类移动机器人指数镇定律的设计

本节用命题中的结论讨论(2, 0)类移动机器人^[4]的镇定问题. 这类机器人的动力学方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sin\theta w_1, & \dot{y} = \cos\theta w_1, & \dot{\theta} = w_2 \\ \begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (11)$$

其中 M 是正定对称阵, τ_1 和 τ_2 是广义力.

取如下全局同胚状态变换和输入变换

$$\begin{cases} x_1 = \theta, & x_2 = -x \sin\theta + y \cos\theta, & x_3 = x \cos\theta + y \sin\theta \\ u_1 = w_2, & u_2 = w_1 - (x \cos\theta + y \sin\theta) w_2 \\ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x \cos\theta - y \sin\theta \end{bmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x \sin\theta - y \cos\theta \end{bmatrix} w_2^2 \end{cases}$$

可将系统(11)变换成形如(2)式的标准非完整扩展链式系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, & \dot{u}_1 = v_1 \\ \dot{u}_2 = v_2, & \dot{x}_2 = u_2, & \dot{x}_3 = x_2 u_1 \end{cases} \quad (12)$$

当 $k = -\frac{u_1(0)}{x_1(0)} > 0$ (即 $k = -\frac{w_2(0)}{\theta(0)} > 0$) 时, 根据要求取一组期望的特征值 λ_1, λ_2 和 λ_3 , 由

$$\left| M - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix} \right| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$$

可计算出

$$\begin{aligned} p_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - k \\ p_2 &= kp_1 - (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) \\ p_3 &= kp_2 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned}$$

由命题知对变换后的系统取非连续控制律

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} -ku_1 \\ p_1 u_2 + p_2 x_2 + p_3 \frac{x_3}{u_1} \end{bmatrix}, & \text{若 } u_1 \neq 0 \\ [0, 0]^T, & \text{若 } u_1 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

可指数镇定系统(12).

变换回原系统的控制律为

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{cases} M \begin{bmatrix} p_1 w_1 - (x \cos\theta + y \sin\theta)(p_1 w_2 + k w_2 - \frac{p_3}{w_2}) \\ + (-x \sin\theta + y \cos\theta)(p_2 + w_2^2) \\ - k w_2 \end{bmatrix}, & \text{若 } w_2 \neq 0 \\ [0, 0]^T, & \text{若 } w_2 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

故以上控制律能镇定系统(11). 当初始条件不满足要求时, 先用一个适当的控制在较短时间内使系统状态满足要求, 然后使用控制律(14).

4 仿真

对移动机器人系统(11), 本节用仿真来验证控制律(14)的有效性. 不失一般性, 取 $M = I$, $[x(0), y(0), \theta(0), w_1(0), w_2(0)]^T = [3, -0.8, 2, 4, -2]^T$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$, 易计算出 $k = 1$, $p_1 = -7$, $p_2 = -18$, $p_3 = -24$. 图 1 和图 2 给出了各个状态和控制输入的时间曲线. 仿真结果是理想的.

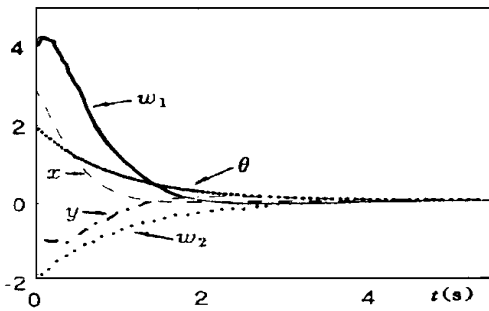


图 1 状态响应曲线

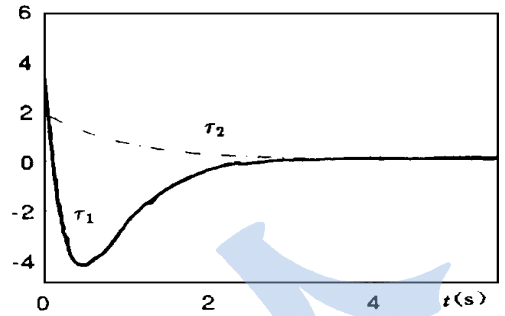


图 2 控制输入曲线

参 考 文 献

- 1 Murray R M. Nonholonomic Motion Planning: Steering Using Sinusoids. IEEE Trans Auto-matic Contr. 1993, 38(5): 700 ~ 716
- 2 Brockett R W. Asymptotic Stability and Feedback Stabilization. In Differential Geometric Control Theory, Brockett R. W. Eds, 1983
- 3 Astolfi A. Exponential Stabilization of a Car-like Vehicle. IEEE International Conf on Robotics and Automation, 1995: 1391 ~ 1396
- 4 Campion G. Structural Properties and Classification of Kinematic and Dynamic Models of Wheeled Mobile Robots. IEEE Trans. Robotics and Automation, 1996, 12(1): 47 ~ 62

EXPONENTIAL STABILIZATION OF THE DYNAMIC NONHOLONOMIC CONTROL SYSTEMS AND ITS APPLICATION TO WHEELED MOBILE ROBOT

DONG Wenjie HUO Wei

(The Seventh Research Division, Beijing University of Aero. and Astro. Beijing 100083, P. R. China)

Abstract This paper studies the exponential stabilization of the dynamic nonholonomic chained systems with two inputs. A discontinuous exponentially stabilizing feedback law is given. An application to the stabilization of a nonholonomic wheeled mobile robot is described. Simulation results show that the approach is effective.

Key words Nonholonomic control, chained system, wheeled mobile robot

作者简介

董文杰: 男, 27岁, 博士, 研究领域: 机器人动力学与控制, 鲁棒控制.

霍伟: 男, 45岁, 教授, 博士生导师. 研究领域: 机器人动力学与控制, 智能控制.