

# 螺旋理论在机器人解空间中的应用

朱本富 江国宪

(吉林工业大学机械工程系, 长春)

**摘要** 本文首先提出了机器人解空间的概念, 然后应用螺旋理论得到三自由度机器人位于解空间界面上的充分必要条件是表示三关节瞬时运动的螺旋与一过手部中心点且螺旋参量为零的螺旋互易。并推导出机器人解空间界面的母线方程。讨论了解空间界面与奇异点的关系。还举例绘制出一些解空间图形。

**关键词:** 机器人, 解空间, 螺旋理论互易, 母线, 奇异点。

## 1 前言

近年来, 对机器人的运动特性的研究引起了广泛的注意, 其中一个重要方面是对于机器人工作空间的研究。

工作空间是机器人在运动过程中, 手部中心在空间中所能到达的点的集合。工作空间主要是相对于机器人的直线运动问题而言的。但是在用机器人完成作业时, 必须求解间接运动位姿问题。由于间接运动位姿问题的多解性, 机器人按要求可能不止一个构形到达作业点。但这些构形中的有些构形由于关节运动范围的限制, 构件间的相互机械性干涉, 与环境障碍物的碰撞等原因而不能获得。因此, 从机器人作业灵活性的观点出发, 机器人再现空间点时, 其间接运动问题的解(即构形)越多越好。但解数多, 也带来了缺点, 如随着解数的增加, 间接运动问题的解的复杂程度也相应增加, 计算工作量增加, 从而使得机械手的控制更困难。

对不同的作业, 要视其作业的复杂程度, 机械手自身结构和机器人的工作空间内的环境情况来布置作业于其工作空间内, 使计算工作量尽量小, 控制尽量简单。这样, 就必须知道具有不同解数的点在机器人工作空间内的分布情况。由此引入机械手解空间的概念。

机器人的解空间分位置解空间和方向解空间。对于 $n$  ( $n \geq 3$ ) 自由度的机械手, 其位置解空间是将手部加上  $(n-3)$  个约束之后,

机器人以相同数目的构形所能到达的点的集合。方向解空间是机械手到达某点时, 所有可能方向的集合。本文只讨论机器人的位置解空间, 并且限制在对三自由度的机器人的讨论。

三自由度的机器人的工作空间中不同的区域内的点, 其间接运动问题有不同的解数。这一结论在文[1]中提到过, 但没有对此区域作更深入的研究, 只是指出了几种三自由度机器人的间接运动位置问题可能有最多解数。文[2]用Jacobian矩阵奇异的方法, 得到三自由度机器人的Jacobian曲线, 此曲线在第一关节的作用下, 则得到Jacobian曲面, 等曲线面即为各解空间的分界面。本文则将用螺旋理论来推导各解空间的分界面。螺旋理论虽然已由Kumar和Waldron<sup>[3]</sup>用于绘制机械手的工作空间的包围面, 但只局限于全为转动副的机器人。

## 2 互易螺旋

刚体的任何空间位移都可以认为是沿空间某轴的移动和绕此轴的转动的合成, 即绕某一轴线 $S$ 的螺旋位移。这便是Chasles定理<sup>[4]</sup>。螺旋位移的概念是描述刚体有限或无限小三维运动的非常方便的概念。Hunt<sup>[5]</sup>对螺旋系统做了深入的研究。其研究工作中, 有一基本概念, 即互易螺旋(Reciprocal Screws), 这是为简化螺旋系统的研究提出的。

所谓互易螺旋是这样两螺旋: 刚体在螺旋 $S_2$ 的约束下, 只能沿其轴线移动和绕其轴线转动, 而沿螺旋 $S_1$ 作用的力螺旋不做功, 则称螺旋 $S_1$ 与 $S_2$ 是互易的(图1)。

收到本文的时间是1987年4月20日。

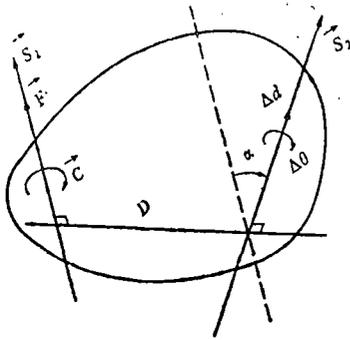


图1 两螺旋的互易条件

由互易螺旋的定义,可以得到两螺旋的互易条件。假定 $S_1$ 与 $S_2$ 的公法线距离为 $D$ ,夹角为 $\alpha$ ,力螺旋由力 $F$ 和力矩 $C$ 组成。在力螺旋作用下,刚体绕 $S_2$ 转动角度为 $\Delta\theta$ ,沿 $S_2$ 移动的距离为 $\Delta d$ ,则 $S_1$ 与 $S_2$ 互易的条件是

$$(P_1 + P_2)\cos\alpha - D\sin\alpha = 0 \quad (1)$$

这里

$$P_1 = C/F, P_2 = \Delta d/\Delta\theta$$

它们分别为 $S_1$ 和 $S_2$ 的螺旋参量。式(1)是互易螺旋间的基本关系式。从此关系式可知,当两螺旋的螺旋参量为零时有:

$$D\sin\alpha = 0 \quad (2)$$

由此得到:

$$D = 0 \text{ 或 } \alpha = k\pi \quad (k=0,1,2,\dots) \quad (3)$$

$D=0$ 表示 $S_1$ 与 $S_2$ 之轴线相交,而 $\alpha=k\pi$ 则表示 $S_1$ 和 $S_2$ 轴线平行。因此,对两螺旋参量为零的螺旋,其互易条件是它们的轴线相交或平行。这是文[3]和文[5]的根本基础。

当两螺旋之一的螺旋参量为 $\infty$ ,不妨假定 $P_2 = \infty$ 时, $\Delta\theta = 0$ 而 $\Delta d \neq 0$ 。由(1)得到与此螺旋互易的条件为:

$$C/P_1 \cdot \cos\alpha \cdot \Delta d = 0 \quad (4)$$

文[5]指出使(4)式满足的两种情况是

$$\textcircled{1} \alpha = 0^\circ, P_1 = \infty$$

$$\textcircled{2} \alpha = 90^\circ, P_1 \text{ 可取任何值}$$

这样,要使螺旋参量为零的螺旋与一螺旋参量为无穷大的螺旋互易,此两螺旋之轴线必须垂直,即 $\alpha = 90^\circ$ 。

### 3 机器人运动的螺旋分析

图2为一具有 $n$ 个关节的机器人,每一关节的瞬时运动用螺旋表示,手部的无限小运动可以用绕 $R$ 转动的 $\Delta\theta$ 和沿 $R$ 移动的 $\Delta R$ 表示。假设第 $i$ 个螺旋 $S_i$ 的轴线与 $R$ 的夹角为 $\lambda_i$ 。 $\lambda_i$ 顺时针方向由 $S_i$ 到 $R$ 度量。第 $i$ 个关节绕 $S_i$ 轴线转动为 $\Delta\theta_i$ ,沿此轴线的移动为 $\Delta\theta_i \cdot P_i$ 。

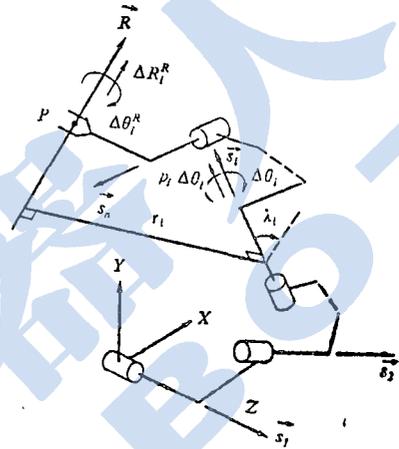


图2 具有n个关节机器人的瞬时运动的螺旋表示

由于 $S_i$ 的运动所引起的手部沿轴 $R$ 和绕轴 $R$ 的运动为

$$\Delta\theta_i^R = \cos\lambda_i \cdot \Delta\theta_i \quad (5)$$

$$\Delta R_i^R = P_i \cdot \Delta\theta_i \cdot \cos\lambda_i - \Delta\theta_i \cdot r_i \cdot \sin\lambda_i \quad (6)$$

手部总的瞬时运动为

$$\Delta\theta = \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i^R, \Delta R = \sum_{i=1}^n \Delta R_i^R \quad (7)$$

当所有的螺旋 $S_i$ 均与螺旋 $R$ 互易时,则有

$$\Delta R/\Delta\theta = -P_R \quad (8)$$

$P_R$ 为螺旋 $R$ 的螺旋参量。这样,手部则没有沿 $R$ 轴线的自由移动。沿 $R$ 轴线的移动速度 $v$ 与绕 $R$ 的转动速度 $\omega$ 必须满足

$$v/\omega = -P_R \quad (9)$$

当 $P_R = 0$ 时,有 $v = 0$ ,即手部不能沿轴线移动。这一结论表明:当机器人的表示各关节螺旋均与一过手部中心且螺旋参量为零的螺旋互易时,则手部不能沿公共互易螺旋轴线移动。

### 4 三自由度机器人解空间界面的母线方程

机器人工作空间中不同的区域，其内的点的间接位置运动问题有不同的解数。设图3中的两部分区域被界面L分开，其中一部分内的点的间接位置问题有m解，另一部分则有n解。如果机器人某一时刻位于A点（或B点），则由

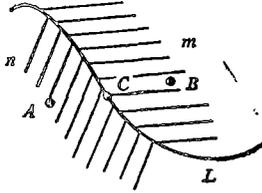


图3 三自由度机器人解空间界面的母线

于运动关节的连续性，不论机械手的构形与A点（或B点）的间接位置问题的哪一解对应，它都可以从A点（或B点）向任何方向运动。现在看来机器人位于界面L上的情况。如果 $n > m$ 且机械手需要由A点运动到B点，由于关节运动的连续性，机械手由A→B的运动最多可由m种构形连续变化实现，与A点的间接位置问题的另外 $(n - m)$ 个解对应的 $(n - m)$ 个构形，则不能连续变化而实现A→B的运动，即运动到界面上后，则不能向另一部分区域运动，将这样的点标记为C点。

由此可以看出，具有不同解数的二部分区域的分界面是由这样一些点组成的：与这些点的间接位置问题的解对应的构形中，至少存在一种构形，不论各种关节的运动速度如何，都不能使机器人从C点向所有方向运动。

从第三部分中的结论可以得出：当机器人表示各关节瞬时运动的螺旋均与过手部中心且螺旋参量为零的螺旋互易时，手部中心所对应的必是具有不同解数的区域的分界面上的点，即各解空间的界面上的点。对解空间界面上的点，也必可以找到一轴线过此点，螺旋参量为零的螺旋，表示各关节瞬时运动的螺旋均互易。

#### 4.1 R-R-R机器人

对于R-R-R机器人，它位于解空间界面上的条件是关节轴线与过手部中心P点的某一直

线要么相交，要么平行。

现假设机器人为一般R-R-R机器人（如图4）。现在 $Z_3$ 轴上取两点 $T_1$ 与 $T_2$ ，它们在第二

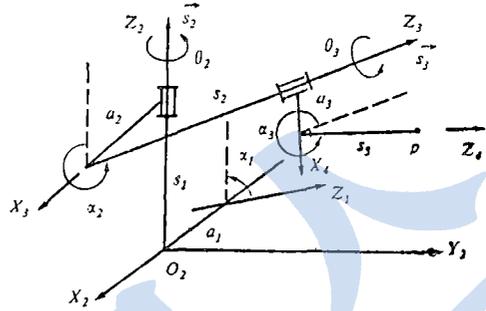


图4 R-R-R机器人的坐标

三坐标系中的坐标分别为 $(0, 0, 0)$ 和 $(0, 0, 1)$ 。P点， $T_1$ 点及 $T_2$ 点在第二坐标系中的坐标可以求出为：

$$\begin{cases} T_{1x} = a_2 c\theta_2 \\ T_{1y} = a_2 s\theta_2 \\ T_{1z} = s_1 \end{cases} \quad (10)$$

式中 $c = \cos$ ， $s = \sin$ ，下同。

$$\begin{cases} T_{2x} = a_2 c\theta_2 + s\theta_2 \cdot sa_2 \\ T_{2y} = a_2 s\theta_2 - c\theta_2 \cdot sa_2 \\ T_{2z} = ca_2 + s_1 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} P_x = Lc\theta_2 + Ms\theta_2 \\ P_y = Ls\theta_2 + Mc\theta_2 \\ P_z = N \end{cases} \quad (12)$$

这里

$$\begin{aligned} L &= Q + a_2 \\ M &= Pca_2 - Rsa_2 \\ N &= Psa_2 + Rca_2 + s_1 \\ Q &= s_3 \cdot s\theta_3 sa_2 + a_3 c\theta_3 \\ R &= s_3 ca_3 + s_2 \\ P &= -s_3 c\theta_3 sa_2 + a_3 s\theta_3 \end{aligned}$$

$T_1$ ， $T_2$ 及P点确定一平面 $\pi$ ，此平面方程为

$$\begin{vmatrix} X - T_{1x} & Y - T_{1y} & Z - T_{1z} \\ T_{2x} - T_{1x} & T_{2y} - T_{1y} & T_{2z} - T_{1z} \\ P_x - T_{1x} & P_y - T_{1y} & P_z - T_{1z} \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

设平面 $\pi$ 与 $Z_2$ 轴的交点为 $\theta$ 。令(13)式中的 $x = y = 0$ ，得到

$$z = s_1 +$$

$$\frac{a_2(-P_x + s_1)sa_2 - a_2ca_2(P_y c\theta_2 - P_x \cdot s\theta_2)}{sa_2(P_x c\theta_2 + P_y s\theta_2 - a_2)} \quad (14)$$

则 $\theta$ 点在第二坐标系中的坐标为 $(0, 0, t)$ ，直线 $PQ$ 必然与第二及第三轴相交，它在第二坐标系中的方程为

$$\frac{x}{P_x} = \frac{y}{P_y} = \frac{z-t}{P_x-t} \quad (15)$$

而 $z_1$ 轴在第二坐标系中的方程为

$$\frac{x+a_1}{0} = \frac{y}{sa_1} = \frac{z}{ca_1} \quad (16)$$

要使 $PQ$ 直线与 $Z_1$ 轴相交，两直线必须满足相交条件

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & t \\ 0 & sa_1 & ca_1 \\ P_x & P_y & P_x-t \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

将(17)式展开并整理得

$$Ac\theta_2 + Bs\theta_2 + c = 0 \quad (18)$$

这里

$$\begin{aligned} A &= L \cdot sa_1 (\theta \cdot s_1 \cdot sa_2 - P \cdot a_2) + \\ &\quad + Q \cdot a_1 \cdot ca_1 sa_2 \cdot M \\ B &= Q \cdot L \cdot a_1 \cdot ca_1 sa_2 + Ms a_1 (P \cdot a_2 - \\ &\quad - \theta \cdot s_1 \cdot sa_2) \\ C &= -a_1 \cdot sa_1 (P \cdot a_2 + P \cdot \theta \cdot s^2 a_2 + \\ &\quad + \theta \cdot R \cdot sa_2 ca_2) \end{aligned}$$

式(18)是关于 $\theta_2$ 及 $\theta_3$ 的方程，将此进行等效变形

$$\begin{aligned} (C-A) \tan^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + 2 \cdot B \cdot \tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + \\ + (C+A) = 0 \quad (19) \end{aligned}$$

如果 $A=B=C=0$ ，即平面 $\pi$ 平行于 $Z_2$ 轴，则 $\theta_2$ 可取任何值；如果不论 $\theta_3$ 取何值， $A=B=C=0$ 恒成立，则工作空间为一曲面；即机器人退化；如果 $A \neq C$ 则可得到(20)式的解为

$$\theta_2 = 2 \arctan\left(\frac{-B \mp \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{C-A}\right) \quad (20)$$

如果 $A=C$ ，但 $B \neq 0$ ，则有

$$\theta_2 = 2 \arctan(A/B) \quad (21)$$

将第一关节固定为某一值时，方程(20)以广义坐标描述的是一条空间曲线。由于方程(20)中不含 $\theta_1$ ，因此，机器人的解空间界面为以(20)式所描述的曲线为母线，以第一轴为回转轴所形成的回转曲面。

#### 4.2 R-P-R机器人

过 $P$ 点垂直于 $Z_2$ 轴的平面设为 $\beta$ 平面，此平面与 $Z_3$ 轴的交点为 $Q$ 。则过 $P$ 点及 $Q$ 点且螺旋参量为零的螺旋必与表示第二及第三关节瞬时运动的螺旋互易。要使其也与表示第一关节瞬时运动的螺旋也互易，则须使第一关节的轴线与过 $PQ$ 的直线相交。

平面 $\beta$ 的方程为

$$Z = P_x \quad (22)$$

平面 $\beta$ 与 $Z_3$ 轴的交点 $Q$ 的坐标为 $(t_1, t_2, t_3)$ ，这里

$$\begin{aligned} t_1 &= a_2 c\theta_2 + (P_x - s_1) \tan a_2 s\theta_2 \\ t_2 &= a_2 s\theta_2 - (P_x - s_1) \tan a_2 ca_2 \\ t_3 &= P_x \end{aligned}$$

$PQ$ 直线方程为

$$\frac{x-P_x}{Q_x-P_x} = \frac{y-P_y}{Q_y-P_y} = \frac{z-P_x}{0} \quad (23)$$

由两直线相交条件得到 $PQ$ 直线与 $Z_1$ 轴相交的条件为

$$\begin{vmatrix} P_x + a_1 & P_y & P_x \\ 0 & sa_1 & ca_1 \\ Q_x - P_x & Q_y - P_y & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (24)$$

将(24)式展开并化简得

$$As_1 + B = 0 \quad (25)$$

这里

$$\begin{aligned} A &= sa_1 (P \cdot s\theta_2 - Q \cdot ca_2 \cdot c\theta_2) \\ B &= P^2 \cdot sa_1 \cdot sa_2 s\theta_2 - PQ (ca_1 \cdot s^2 a_2 + \\ &\quad + sa_1 ca_2 sa_2 c\theta_2) - Q \cdot R \cdot (ca_1 sa_2 ca_2 + \\ &\quad + sa_1 c^2 a_2 c\theta_2) - P (a_2 \cdot ca_1 + a_1 ca_1 c\theta_2) \\ &\quad + Q \cdot a_1 \cdot ca_1 \cdot ca_2 \cdot s\theta_2 \end{aligned}$$

式(25)表示的也是一曲线，为回转形解空间界面的母线。显然， $A=B=0$ 时， $s_1$ 可取任何值； $A=B \equiv 0$ 时，机器人退化； $B=0$ 而 $A \neq$

0 时,  $s_1 = 0$ ;  $A = 0$ ;  $B \neq 0$  时,  $s_1$  无解;  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$  时,  $s_1 = B/A$ 。

其它几种三自由度机器人的解空间的界面的母线方程推导从略, 它与文〔2〕中的结果相同。需要注意的是: 若第一关节为转动关节, 则解空间的界面为回转面; 若第一关节为移动关节, 则解空间的界面为母线沿第一轴线方向转动而形成。

### 5 解空间的界面与奇异点的关系

当机器人的手部中心位于奇异点时, 它不能沿任意方向有微小移动。此外, 当机器人在已知位置和方向奇异时, 其间接运动问题将有无限数目的解〔7〕。根据解空间界面的性质, 可得到机器人的解空间界面上的点均为奇异点。另外, 具有无数解的空间内的点也为奇异点; 奇异点也只位于解空间界面上和具有无数解的解空间内。因此, 机器人手部中心点为奇异点的充分必要条件是该点为机械手解空间界面上的点或具有无数解的解空间内的点。

### 6 举例

现以R-R-R机器人为例, 用计算机绘制其解空间。由于其解空间的界面为以第一轴为回转轴的回转面, 因此, 用过第一轴的截面去截此解空间, 截形便反映出各解空间的形状、大小和位置。图5, 6和7便是在不同结构参数下, 机器人的解空间被过第一轴的平面所截出的形状。图中所标数字为此区域内的间接位置问题的解数。 $\alpha$ 角用度*i*表示。

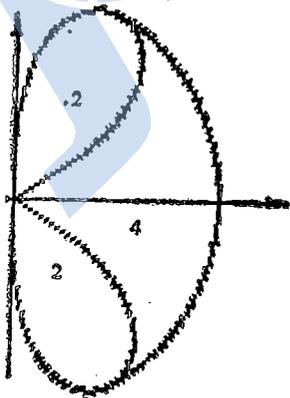


图5 解空间的截面形状(一)

$S_0 = 0, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0; a_1 = 0, a_2 = 30, a_3 = 30; i_1 = 60, i_2 = 90, i_3 = 0$

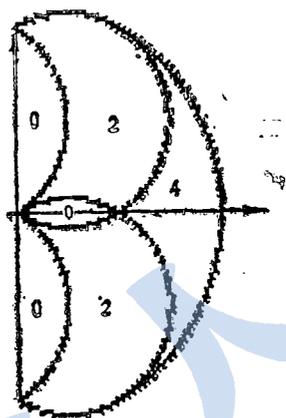


图6 解空间的截面形状(二)

$S_0 = 0, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0; a_1 = 0, a_2 = 30, a_3 = 30; i_1 = 60, i_2 = 90, i_3 = 0$

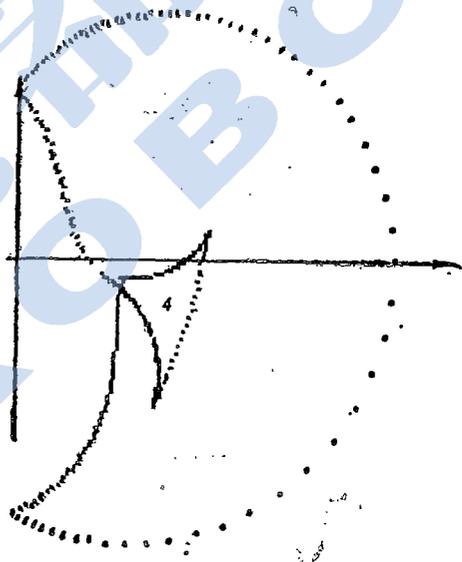


图7 解空间的截面形状(三)

$S_0 = 0, S_1 = 10, S_2 = 10, S_3 = 10; a_1 = 30, a_2 = 40, a_3 = 40; i_1 = 60, i_2 = 60, i_3 = 60$

### 7 结束语

本文运用螺旋理论所得到的机器人位于其解空间界面上的充分必要条件仅限于三自由度机器人, 对于多于三自由度的机器人, 此条件还须进行一定的修改。解空间的界面与奇异点的关系则不论对多少自由度的机器人都正确。至于对有关节运动范围限制或无关节运动范围限制的机器人的解空间的绘制, 详见文〔8〕。可以相信, 本文的研究进一步完善了机器人机构理论, 为机器人的运动设计特别是轨迹规划及

控制提供了一个基本而又必要的工具。

### 参 考 文 献

- 1 Gupta K C. On the nature of robot workspace. *The International Journal of Robotics Research*, 1986; 15(2):112—121
- 2 HSU Mingshu, Dilip Kohli. Boundary surfaces and accessibility regions for regional structures of manipulators. *Mechanism and Machinery Theory*, 1987; 22(3):227—289
- 3 Kumar A, Waldron K J. The workspace of a mechanical manipulator. *ASME J Mech Design*, 1981; 103: 665—672
- 4 张启先. 空间机构分析与综合 (上册). 北京, 机械工业出版社, 1984
- 5 Hunt K H. *Kinematic geometry of mechanisms*. Oxford, Clarendon Press, 1978
- 6 Sugimoto K, Duffy J, Hunt K II. Special configuration of spatial mechanisms and robot arms. *Mech and Mach Theory*, 1982; 17(2): 119—132
- 7 Lai Z C, Yang D C II. A new method for the singularity analysis of simple six-link manipulators. *The international Journal of Robotics Research*, 1986; 5(2): 66—74
- 8 朱本富. 机械手解空间的研究. 吉林工业大学硕士学位论文, 1988

## APPLICATION OF SCREW THEORY TO ROBOT SOLUTION SPACES

ZHU Benfu JIANG Guoxian

(Mechanical Engng Dept., Jilin Univ of Technology, Changchun)

### Abstract

Concept of manipulator solution space is first presented in this paper. By applying screw theory, we derive a sufficient and necessary condition of manipulators with three degrees of freedom locating on the boundary surfaces of solution-space. That is the screws representing the instant motion of pairs must be reciprocal to a screw passing through the centre of the terminal with zero screw parameter. Then the equation of the generator of manipulator solution-space boundary surfaces are derived. Next, the relationship between solution-space boundary surfaces and singularity is discussed. And some examples of mapping are given.

**Keywords:** robot, solution-space, screw theory reciprocal, generator, singularity

### 生物金属与形状记忆合金

生物金属是为了作为通电加热的驱动装置利用而特制的金属丝,基本上是钛镍系形状记忆合金。

和一般的器件比较,具有以下特点。

①连续使用的尺寸稳定性优越。②反复动作寿命大幅度提高。③形状回复力和变形中需要的力差大(以小偏置力给予变形)。④过热性能强。⑤电阻大。⑥冷却时的响应优越。⑦不用担心由于常温户外空气引起的误动作。

生物金属机器人 DH—101 是使用这种生物金属丝的初期商品。强调从形状记忆合金驱动装置得到的诸特点是这种商品的目的。

(郭 婷)