

现代控制系统灵敏度理论及其应用

孙捷先

(中国科学院沈阳自动化所)

〔摘要〕：本文扼要介绍灵敏度理论的发展概况，灵敏度理论、灵敏度分析方法对现代控制理论的影响及其工程方面的实际应用，并叙述未来的发展动向。

一 序 言

灵敏度是描述、分析、综合最优控制、自适应及自动化最优化的重要指标之一，它是系统状态及性能指标受系统参数影响而变化的定量的描述。灵敏度通常用系统的灵敏度模型，即用动态系统的灵敏度函数来确定。灵敏度函数能够直接用系统方程相对于参数的微分和其他数学方法得到。如果考虑的是特殊形式的系统，那么，灵敏度函数可用灵敏度点或应用结构法等得到。

灵敏度概念和分析方法最早是在电子电路、各种有源滤波器、电子测量系统、高精度仪表和解算装置中提出来的，后来用微分方程、线性代数等数学方法对灵敏度函数进行了具体的描述，才成为控制系统灵敏度理论研究发展的基础。

任何一个系统或过程的设计，总是按某一预定目标来选择系统或过程的方案以及系统参数，要求在允许的条件下，按某种意义最优地达到这个目标。另外，若系统已经设计好，为了检验系统是否能达到设计要求，或者为了确定它本身所具有的性能，我们就必须考虑在极限的条件下系统的工作品质。最重要的问题在于实际发生的参数误差会不会使系统的性能指标（性能指标或成本函数的泛函，对于控制矢量函数或控制参数来说，应使它最小。性能指标可以是燃料的消耗量、到达目标的时间、要

求的弹道之间误差的平方和、经济成本、能量消耗或者它们中的几个加权）超出容许范围。许多寻求最优设计方案，最优控制参数以及极限工作条件的问题，都可以归结成寻求最优控制问题。随着现代高精度控制系统和计算机的发展，近二十余年来最优控制问题的研究获得了迅速的发展，寻求最优控制的计算和综合方法也在飞速发展。最优控制的数学解与微分方程的参数有密切关系。实际上，微分方程一般只是描述系统或装置的理想特性，当然，所取的数学模型也不可能是同实际装置精确一致。往往系统或装置的参数或有一些变化，或者缓慢偏离所取的值。因此，必须在求最优化问题的数学解以前，研究参数变化对系统的影响。例如，在实际系统中，一般给出系统输出变化所容许的范围。

$$a_i \leq \delta y_i \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

如果输出变量是品质指标，那么需要寻求那些参数变化对输出变量的影响最小，那些参数变化对输出变量影响最大。从系统的最优化观点出发，需要估算出每个变量的储备，目的是在容许的范围内，确定系统输出或性能指标的变化，然后使其一般储备最小，为此，就要研究系统的状态或性能指标（或输出）与参数误差（变差或随机变化）之间的关系。例如，如果发现，一个参数值变化1%，引起一个重要状态变量的轨道变化10%，这样可以判定，最优系统对参数的变化是灵敏的。这时，它的工程最优化的意义，可以说是令人怀疑的。

Bode(1945)和Truxal(1955)的工作开辟了自动控制的新分支,提出了灵敏度分析知识,灵敏度分析方法或平滑的灵敏度理论〔1〕。经过Bykhovski, Meissinger和Kokotovic的研究,使系统灵敏度理论及其方法得到进一步发展和补充。他们叙述了灵敏度模型和灵敏度函数的基本表示法,主要涉及的是由于参数的变化而引起动态系统性能变化的分析。第一个灵敏度分析方法广泛而系统的综述由P.Kokotvi和P.C.Pytman公开发表于1965年〔2〕,参考文献包含了157篇研究经典伺服系统和近代系统灵敏度的文章。集中地和系统地研究灵敏度及其发展是在最近十多年,至今,在研究灵敏度理论及其方法方面,已有几百篇优秀论文发表在各种杂志中。第二篇灵敏度理论及其方法的综述发表于1971年〔3〕。参考文献包含了150篇研究经典和近代系统灵敏度的文章,在1965年综述的基础上,做了大量的工作,并有所发展。第三篇控制系统灵敏度综合评述的论文发表于1972年〔1〕,用灵敏度作为目的和工具,对现代控制理论及其工程应用的影响做了重要而详细的论述。除此之外,在一些书刊中记载了大量的成果〔4~14〕。

本文的目的是扼要介绍最基本最常用的灵敏度概念、灵敏度函数、灵敏度分析方法及其在现代控制系统中的应用,使读者能够从公开发表的文献和著作中得到启发,在研究现代高精度控制系统与测量装置时,能够充分重视灵敏度理论及其分析方法对系统最优化性能指标综合分析设计的重要影响,文中并不企图提供全部成果。

二 基本灵敏度函数的陈述

2.1 系统附加作用的分析

让我们来研究下面的系统。

$$\dot{x}_i = \phi_i(x_1, \dots, x_n; \alpha_1, \dots, \alpha_m) \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.1)$$

式中 α_j ($j=1, \dots, m$) 是系统的参数。

假如变差参数为 $\Delta\alpha_j$, 那么变分作用可用下面的微分方程式来描述。

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \phi_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n; t; \alpha_1 + \Delta\alpha_1, \dots, \\ &\quad \alpha_m + \Delta\alpha_m), \\ x_i(0) &= x_i^0 \quad (i=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.2)$$

变差作用 $\tilde{x}_i(t)$ 相应于系统(2.2), 基本作用 $x_i(t)$ 相应于系统(2.1), 被确定的附加作用是

$$\Delta x_i = \tilde{x}_i(t) - x_i(t) \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.3)$$

假定(2.1)和(2.2)的解对 α_i 是可微的, 那么附加作用(2.3)是对 α_i 展开的台劳级数。为了进行充分研究起见, 可采用一阶近似

$$\Delta x_i(t, \Delta\alpha_1, \dots, \Delta\alpha_m) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right) \Delta\alpha_j + \dots, \quad (2.4)$$

相应的变差 $\Delta\alpha_j$ 将被认为是无穷小量。

如果初始条件 $x_i(0) = \beta_i$, 那么相应于系统(2.1)的变差作用初始条件为 $\beta_i + \Delta\beta_i$ 。对于 λ 变差的情况详见文献〔2,3〕。

2.2 灵敏度函数

让我们来研究用非线性微分方程描述的系统。

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \phi_i(x_1, \dots, x_n, t, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \\ x_i(0) &= x_i^0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.5)$$

式中

x_i ——系统的相座标

α_j ——系统的参数。

附加作用的形式为

$$\Delta x = U(x, \alpha) \Delta\alpha + \omega(\Delta\alpha) \quad (2.6)$$

式中, $\Delta\alpha$ ——参数空间元素的变差, $\omega(\Delta\alpha)$ 是 $\Delta\alpha$ 高阶无穷小量, $U(x, \alpha)$ ——灵敏度算子。在通常情况下, 灵敏度算子是灵敏度矩阵

$U = \frac{\partial x}{\partial \alpha}$ 。其他确定 U 的方法,即求参数 α 对

座标 x 的影响函数给出在文献〔15、16〕中。

(2.5)式对 α_j 进行微分可得灵敏度方程。

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right) = \frac{d}{dt} U_{ij}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \phi_k}{\partial x_k} U_{kj} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_j}$$

$$U_{ij}(0) = 0$$

$$(i, k = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m) \quad (2.7)$$

由此可见,其解为一参数族。参数族不仅由原始方程(2.5)来确定,而且还取决于初始值或边界条件。

灵敏度方程的解不是获得灵敏度函数最方便的方法。寻求灵敏度函数很多是利用模型来实现的,也可以利用模拟计算机获得灵敏度方程式的解。灵敏度点的方法通常应用于适应系统。在最优控制系统中,需更精确地评价系统时,有时要求得到高阶灵敏度函数。

因为系统的类型不同,因此,对不同类型的系统就有不同形式的灵敏度测度。

2.3 结构法

研究线性系统灵敏度函数时,通常是用结构法。结构法明显地给出了一般控制系统的特性和简化它的设计模型。根据原终结构获得灵敏度函数的方法由 Быховский 最早用于电路和计算装置及其仪表系统精度的研究,首先由原始结构得出附加作用结构,即变差结构,而变差结构就成为产生附加作用——影响精度的原因。

对线性非时变单输入单输出系统, Bode 提出了传递函数 T 对参数 α 的对数导数,作为灵敏度函数,即

$$S_{\alpha}^T = \frac{\partial \ln T(S, \alpha)}{\partial \ln \alpha} \quad (2.8)$$

这种表示法以后被推广到系统传递函数 T 对另一些传递函数的对数导数,灵敏度函数为

$$S_p^T = \frac{\partial \ln [T, p(s)]}{\partial \ln p(s)} \quad (2.9)$$

称为对数灵敏度。

根据线性系统拓扑学的分析,可得多环系统 S_{α}^w 的表达式为〔2〕

$$S_{\alpha}^w = \frac{\Delta_{\alpha}}{\Delta} - \frac{(\sum p_i \Delta_i)_{\alpha}}{\sum p_i \Delta_i} \quad (2.10)$$

式中 Δ 是被研究系统信号流程图的行列式, p_i 为正向通路传输, Δ_i 为相应它的余因式,下标 α 表示含有被变分的参数 α 的支路除外;式(2.10)还可以用反馈差 F 与零反馈差 F' 来表示

$$S_{\alpha}^w = \frac{1}{F} - \frac{1}{F'} \quad (2.11)$$

如果被变分的参数 α 位于在整个的正向通路里,那么 $(\sum p_i \Delta_i)_{\alpha} = 0$;如果 α 不包含在任一正向通路里,那么 $(\sum p_i \Delta_i)_{\alpha} = \sum p_i \Delta_i$ 。

2.4 比较灵敏度

下面介绍新的灵敏度公式,给出其他的 Bode 公式解释和在多变量而同样在非线性系统中进行综合的可能性,这个方法叫做比较灵敏度。

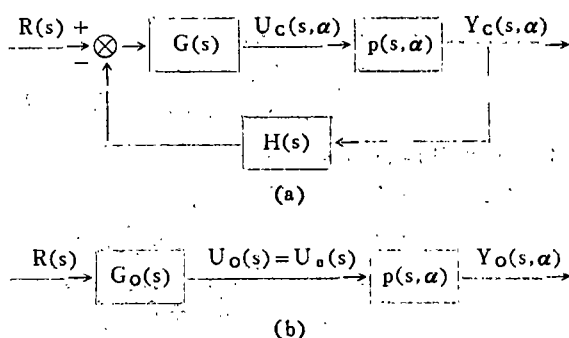


图1 (a)闭环系统(b)开环系统

让我们来研究如图1(a)、(b)所示的线性非时变单输入单输出的闭环和开环系统。含有参数矢量 α 的对象用传递函数 $p(s, \alpha)$ 表示。 $G(s)$ 和 $H(s)$ 表示含有不变参数的子系统(控制器)。标称对象 $p_n(s) = p(s, \alpha_0)$ 的输出

$Y_n(s) = Y_c(s, \alpha_0)$ 与标称对象的输入 $U_n(s) = U_c(s, \alpha_0)$ 的关系是

$$Y_n(s) = p_n(s)U_n(s) \quad (2.12)$$

式中

$$U_n(s) = G(s)[R(s) - H(s)Y_n(s)] \quad (2.13)$$

对于被变分的对象 $p(s, \alpha)$ ，闭环系统的输出 $Y_c(s, \alpha)$ 为

$$Y_c(s, \alpha) = p(s, \alpha)U_c(s, \alpha) \quad (2.14)$$

我们定义参数引起的误差为：标称的输出和由于参数变化而引起的实际的输出之间的差值。即

$$\begin{aligned} E_c(s, \alpha) &= Y_n(s) - Y_c(s, \alpha) \\ &= \frac{[p_n(s) - p(s, \alpha)]}{[1 + p_n(s)G(s)H(s)]} \\ &\quad \frac{G(s)R(s)}{[1 + p(s, \alpha)G(s)H(s)]} \end{aligned} \quad (2.15)$$

现在研究图1(b)的开环系统，它具有图1(a)闭环系统同样的标称对象输入，即

$$U_o(s) = U_n(s) \quad (2.16)$$

这就保证被比较的两个系统将有相同的标称响应，因为

$$Y_c(s, \alpha_0) = Y_o(s, \alpha_0) = Y_n(s)$$

或者

$$\begin{aligned} T_n(s) &= p_n(s)G_o(s) \\ &= \frac{p_n(s)G(s)}{1 + p_n(s)G(s)H(s)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

开环系统引起的误差为

$$\begin{aligned} E_o(s, \alpha) &= Y_n(s) - Y_o(s, \alpha) \\ &= p_n(s)U_n(s) - P(s, \alpha)U_n(s) \\ &= \frac{[P_n(s) - P(s, \alpha)]G(s)H(s)}{1 + P_n(s)G(s)H(s)} \end{aligned} \quad (2.18)$$

由 (2.15) 和 (2.18) 得

$$E_c(s, \alpha) = \frac{E_o(s, \alpha)}{1 + P(s, \alpha)G(s)H(s)} \quad (2.19)$$

这就是闭环和开环参数引起的误差之间的关系式。我们定义比较灵敏度函数 $S(s, \alpha)$ 为

$$S(s, \alpha) = \frac{1}{1 + p(s, \alpha)G(s)H(s)} \quad (2.20)$$

因此，式 (2.19) 还可以写成

$$E_c(s, \alpha) = S(s, \alpha)E_o(s, \alpha) \quad (2.21)$$

当研究对象参数的微小变化时，可采用一阶近似计算，式 (2.21) 可以写成

$$dY_c = S(s)dY_o \quad (2.22)$$

式中

$$S(s) = \frac{1}{1 + p_n(s)G(s)H(s)} \quad (2.23)$$

将Bode公式应用图1(a)的闭环系统，就可得到与式 (2.23) 相同的表达式，即

$$S_p^T(s) = \frac{1}{1 + p_n(s)G(s)H(s)} \quad (2.24)$$

因此，对于线性非时变系统，在对象参数偏离标称值发生微小变化的这种特殊情况下，比较灵敏度函数等于Bode灵敏度函数 S_p^T 。

同理，可以把比较灵敏度推广到多变量线性非时变系统。我们再一次利用图1(a)和(b)，只要把所有信号看作矢量信号，把所有的传递函数看作矩阵传递函数，于是得到

$$E_c = SE_o \quad (2.25)$$

式中 S 为比较灵敏度矩阵，定义为

$$S = (1 + PGH)^{-1} \quad (2.26)$$

2.5 轨道灵敏度函数

上面介绍的比较灵敏度的基本概念里涉及到了开环和闭环的参数引起的误差。现在我们介绍另一种方法，即轨道灵敏度函数。

由研究微分方程的解与参数的依赖关系能够得到参数变分的另一种方法。假如 $y(t, \alpha)$ 是依赖于参数矢量 α 微分方程的解，那么，由于参数变分 $\delta\alpha$ 所引起的系统输出矢 $y(t, \alpha)$ 的变分，可采用一阶近似计算得

$$\delta y(t, \alpha) \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_i} \right) \delta \alpha_i \quad (2.27)$$

此变分正好是参数引起的误差（精确到一阶近似）：

$$e(t, \alpha) = y_n(t, \alpha_n) - y(t, \alpha) \approx \delta y(t, \alpha) \quad (2.28)$$

偏导数

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_i} = \eta_i \quad (2.29)$$

称为轨道灵敏度函数。

在某些应用中，特别是在模拟计算机仿真系统中，用另一种灵敏度函数，即

$$S = \frac{\partial y}{\partial \ln \alpha_i} \quad (2.30)$$

称为对数轨道灵敏度函数。

2.5 一般系统的比较灵敏度

在2.4中讨论了线性非时变系统的比较灵敏度。下面我们把比较灵敏度推广到更一般的系统。

现在考虑非线性时变系统

$$\dot{x} = f(x, u, \alpha, t) \quad (2.31)$$

$$y = h(x, r, \alpha, t) \quad (2.32)$$

式中 x 为状态变量， r 为系统的输入， u 为对象的（控制）输入， α 为参数矢量。我们考虑两种结构，一种是闭环情况

$$u = u_c(t, \alpha) = g(y, r, t) \quad (2.33)$$

另一种是开环情况

$$u = u_o(t) = g_o(r, t) \quad (2.34)$$

对标称参数矢量 α_o 、所有的 t 以及所有容许的输入 $r(t)$ ，我们要求

$$u = u_c(t, \alpha_o) = u_o(t, \alpha_o) \quad (2.35)$$

此地用 $y_c(t, \alpha)$ 表示闭环输出，用 $y_o(t, \alpha)$ 表示开环输出。用式（2.31）和（2.32）对参数 α_j 进行微分，经过运算简化后，得到联系

$\frac{\partial y_c}{\partial \alpha_j}$ 和 $\frac{\partial y_o}{\partial \alpha_j}$ 的线性时变算子 $\hat{S}$ ，使得

$$\frac{\partial y_c}{\partial \alpha_j} = \hat{S} \frac{\partial y_o}{\partial \alpha_j} \quad (2.36)$$

注意，此线性算子对所有的 j 是相同的，也就是式（2.36）把 $j=1, 2, \dots, p$ 的输出灵敏度联系起来。由于 $\hat{S}$ 的这种性质，我们可将式（2.36）乘以 $d\alpha_j$ 并求和

$$\sum_{j=1}^p \frac{\partial y_c}{\partial \alpha_j} d\alpha_j = \hat{S} \sum_{j=1}^p \frac{\partial y_o}{\partial \alpha_j} d\alpha_j \quad (2.37)$$

或

$$\delta y_c = \hat{S} \delta y_o \quad (2.38)$$

但是，用一阶近似计算得 $e_c(t) = \delta y_c$ ， $e_o(t) = \delta y_o$ ，因此

$$e_c(t) = \hat{S} e_o(t) \quad (2.39)$$

这就是我们寻求的比较条件，也是对于线性非时变情况的推广。

我们能够把上述结论推广到更一般的系统。这些系统是分布参数系统、离散系统和复合系统，用算子形式表示的时变线性系统灵敏度、用算子表示的一般系统的比较灵敏度以及在有干扰输入和初始状态响应项时得到的非时变模型和非线性系统的比较灵敏度算子。

2.6 灵敏度的间接评价

在时域里除了直接确定附加作用以外，还采用间接的灵敏度评价〔17〕。对于简单的单环系统，可以用系统的幅相特性图解来得到〔18〕。

附加作用的直接计算评价，用频率法是困难的，平方指标是一种最方便的计算方法。例如，附加作用的标准偏差 $\sigma_{\Delta x}^2$ 取决于参数的变差

$$\sigma_{\Delta x}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Delta \alpha_i}{\alpha_i} \right)^2 \left| S_{\alpha_i}^*(j\omega) \right|^2 \phi(\omega) d\omega \quad (2.40)$$

式中 $\phi(\omega)$ 是输入信号的频谱密度。对于按照随机规律的慢变化变差，在文献〔19〕中有关于 $\sigma_{\Delta x}^2$ 的描述。

另一种间接评价是用代数方法，即系统响应求值不变的一种方法。这种方法是，当系统参数偏离标称值发生微小变化时，确定系统极点有如何的灵敏性。如果一个特殊的参数极点灵敏度是已知的，那么由于参数的微小变化（误差、公差等），其极点位置总的改变就很容易计算出来。这种方法是描述线性反馈系统动态误差分析的一种简单方法。

下面让我们研究如图2所示的单环系统的

极点灵敏度。图 2 的闭环传递函数是

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (2.41)$$

式中开环传递函数是

$$G(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+q_1)(s+q_2)\dots(s+q_n)} \quad (2.42)$$

$$W(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} \quad (2.43)$$

式中 $z_1, \dots, z_m$ 为开环传递函数的零点, $q_1, \dots, q_n$ 为开环传递函数的极点, $p_1, \dots, p_n$ 为闭环传递函数的极点。

在参数微小变化的情况下, 可采用台劳级数展开一阶近似计算, 得到由于开环极点变化闭环极点的灵敏度为

$$S_{q_1}^{p_1} = -\frac{1}{p_1 - q_1} K(-p_1) \quad (2.44)$$

其中 $K(-p_1)$ 表示 $W(s)$ 在 $S = -p_1$ 点的留数。一般写作

$$S_q^p = -\frac{1}{p - q} K(-p) \quad (2.45)$$

用同样的方法, 可得零点和环路增益的灵敏度是

$$S_z^p = -\frac{1}{p - z} K(-p) \quad (2.46)$$

$$S_K^p = \frac{1}{p} K(-p) \quad (2.47)$$

由于开环极点和零点的微小变化闭环极点总的灵敏度是

$$S_{q_n}^p = S_{q_1}^p + S_{q_2}^p + \dots + S_{q_n}^p + S_{z_1}^p + S_{z_2}^p + \dots + S_{z_m}^p = 1 \quad (2.48)$$

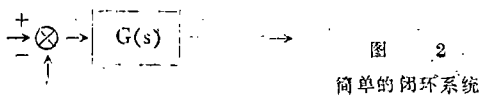


图 2 简单的闭环系统

因此, 任何闭环极点点到所有开环系统极点和零点的灵敏度为 1。

决定单环极点灵敏度的方法可以推广到决

定多环系统闭环极点的灵敏度。

上述代数评价方法, 实质上是用给定开环参数变化的百分数, 如极点变化的百分数, 来决定闭环极点灵敏度, 进而得到闭环系统响应不变的计算。

2.7 性能指标灵敏度

与相对灵敏度

灵敏度设计方法分成两个范畴: 绝对灵敏度和相对灵敏度[20]。绝对灵敏度所关心的是系统的某个量由于某个参数的变化所引起的改变, 例如传递函数、系统的输出、带通滤波器的调谐频率等。

对于最优控制而言, 如果参数的标称值用 α_0 来表示, 那么性能指标的增量为

$$\Delta J = J^*(t_0, x, \alpha) - J^*(t_0, x, \alpha_0) \quad (2.49)$$

ΔJ 可以为正, 也可以为负, 取决于参数的变化。

系统参数在标称值附近展开 $J^*(t_0, x, \alpha)$ 为台劳级数, 可采用一阶近似计算得

$$\Delta J = \sum_i \frac{\partial J^*(t_0, x, \alpha)}{\partial \alpha_i} \bigg|_{\alpha_i = \alpha_{i_0}} \delta \alpha_i \quad (2.50)$$

因此, 我们得到性能指标灵敏度函数为

$$S = \frac{\partial J^*(t_0, x, \alpha)}{\partial \alpha_i} \bigg|_{\alpha_i = \alpha_{i_0}} \quad (2.51)$$

相对灵敏度是描述性能指标的变坏程度的。例如性能指标是二次型的, 则相对灵敏度为

$$S[\vec{V}, \vec{u}(t)] = \frac{J(\vec{V}, \vec{u}) - J(\vec{V}_0, \vec{u}^*)}{J(\vec{V}_0, \vec{u}^*)} \quad (2.52)$$

式中 $J(\vec{V}_0, \vec{u}^*)$ 是用最优控制 $\vec{u}^*$ 与系统参数的

标称值 $\vec{V} = \vec{V}_0$ 得出的性能指标的极小值。两种方法的目的都在于使系统的灵敏度为极小。

设计中要考虑的往往是参数的大偏差情

况, 这时考虑相对灵敏度。设计中的一种思想是选择控制 $\vec{u}$, 使性能指标 J 尽可能接近在参数 $\vec{v}$ 的一切可能值处的极小值, 这时定义一切受控系统的灵敏度是

$$S(\vec{u}) = \max_{\vec{v}} (\vec{u}, \vec{v}) \quad (2.53)$$

设计的方法就是要选择控制 $\vec{u}$, 使 $S(\vec{u})$ 达到极小。即求

$$\min_{\vec{u}} \max_{\vec{v}} S(\vec{u}, \vec{v}) \quad (2.54)$$

这就是所谓的极大极小值问题。

对于单输入线性系统, 如果有二次性能指标, 那么一个基本可能结果是: 闭环装置比开环装置更好, 这意思是说, 对于每个状态变量的误差平方的积分, 闭环情况的这个值总比开环的更小。最有意义的是 (但有时是所不希望的结果之一), 当用开环或用闭环对一个带有变化参数的装置实现最优控制时价值函数出现的灵敏度。可能认为, (通过把伺服系统的理论结果推广), 如果用最优的闭环系统与一个最优的开环系统作比较时, 闭环系统价值函数极小值的灵敏度会比较小, 这种看法是错误的, 至少对一大类最优控制问题是如此。在文献 [21, 22] 中已经证明, 对有二次价值函数的线性系统, 不论是开环还是闭环控制, 它的价值函数的灵敏度是相同的。在文献 [23] 中证明了一大类非线性系统和性能指标的最优控制, 不论是开环还是闭环, 它们的灵敏度是等价的。当然, 价值泛函灵敏度不变性这个事实, 并不意味着对设计最优反馈系统不必注意, 还有许多与灵敏度有关的问题需要考虑。最优系统的灵敏度在文献 [24, 25] 中进行了研究。

2.8 其他类型灵敏度函数

上面简述了含有非时变参数 α 的系统。有时变参数 $\alpha(t)$ 的系统问题困难较多, 因为状态

变量 x 不再是参数的函数, 详细论述可参阅文献 [4]; 离散系统 [26~32]、分布参数系统 [33, 34] 非线性系统 [35~37] 和自适应系统 [38, 39] 等灵敏度函数 (或灵敏度方程) 分别在相应的文献中做了详细的介绍, 这里就不再重复。

上述的灵敏度函数决不是仅有的可用的灵敏度函数, 而只是最基本的最常用的一部分。由于各类系统有它自己合适的定义, 因此就不能有灵敏度通用的定义和测度。例如, 对振荡器而言, 振荡频率和振幅灵敏度的概念远较轨道或性能指标灵敏度适用。一般来说, 如果它有实际意义且对最优化综合分析有用, 那么任何灵敏度定义都是有效的。

2.9 灵敏度降低准则

1. 线性非时变系统灵敏度降低准则

综上所述, 比较灵敏度矩阵把开环和闭环结构中参数引起的误差的拉氏变换联系起来。Cruz 和 Perkins 建议系统灵敏度比较用泛函表示, 此泛函由参效引起的误差的二次型组成, 即

$$\text{性能指标} = \int_0^{t_1} e^T(t) Q e(t) dt \quad (2.55)$$

若有一个固定的半正定矩阵 Q ,

$$\int_0^{t_1} e_c^T(t) Q e_c(t) dt \leq \int_0^{t_1} e_o^T(t) Q e_o(t) dt \quad (2.56)$$

对于所有的输入 $r(t)$ 和所有的 $t_1 \in [0, \infty]$, 使得

$$\int_0^{t_1} r^T Q r dt < \infty$$

我们就说图 1 (a) 的反馈结构不如图 1 (b) 标称等价的开环结构灵敏。 $e_c(t)$ 和 $e_o(t)$ 分别为图 1 (a) 和 (b) 闭环和开环系统的误差。不等式 (2.56) 能够用频率域准则来表示, 即对于所有

的 $t_1 \in [0, \infty)$, 使得 $\int_0^{t_1} r^T Q r dt < \infty$, 则式

$$\int_0^{t_1} e_c^T(t) Q e_c(t) dt \leq \int_0^{t_1} e_o^T(t) Q e_o(t) dt \text{ 成立的}$$

充分条件是, 对于所有的实数 ω 有

$$Q - S^T(-j\omega)QS(j\omega) \geq 0 \quad (2.57)$$

若 $e_c(t)$ 是任意的平方可积矢量, 则条件(2.57)也是必需的。

对于单输入单输出系统, S 和 Q 都是标量, 对于所有的 ω , 式(2.57)变为

$$|S(j\omega)| \leq 1 \quad (2.58)$$

这个准则和Bode灵敏度一起, 都被用来作为设计准则。当单变量闭环系统设计满足式(2.58)

时, 按照如下意义

$$\int_0^{t_1} e_c^2(t) dt \leq \int_0^{t_1} e_o^2(t) dt \quad (2.59)$$

此系统不如具有相同传递函数的开环系统灵敏。

2. 一般系统的比较灵敏度降低准则

一般系统的灵敏度降低准则, 是〔4〕中对于线性非时变系统建立准则的推广。

在

$$\|\delta y_c\| \leq \|\delta y_o\| \quad (2.60)$$

的意义上, 系统 ψ_1 不如系统 ψ_2 灵敏, 若

$$\|\hat{S}\| \leq 1 \quad (2.61)$$

而且, 若这些算子定义希尔伯特空间中的变换, 则式(2.60)成立的充分条件是 $(I - \hat{S}^* \hat{S})$ 应为非负算子。

三 灵敏度理论在现代

控制系统中应用的概述

1. 灵敏度作为目的

研究灵敏度理论的“黄金时代”, 主要对灵敏度发展有影响的是用计算机方法获得灵敏度函数, 特别注意于研究下面各类动态系统灵敏度的算法和计算机方法: 连续系统、离散系统, 单输入单输出多变量系统, 用状态变量描述的系统, 时间延迟系统和分布参数系统等等。目前, 灵敏度理论及其分析方法还广泛应用于控制系统的其他诸方面, 如稳定性、能控性、

参数的不变性和最优自适应的最优化等等。

2. 灵敏度作为工具

利用计算机方法计算灵敏度函数, 很早就研究了测辨的算法, 参数的最优化和自适应控制系统的综合等, 用以满足最优的性能指标。现今引入灵敏度理论及其分析方法, 是去解决各种重要的现代控制系统中最优化的问题, 这也是当前自动控制理论的中心问题。

用灵敏度理论及其分析方法作为目的和工具, 对现代控制系统及其装置进行最优综合, 可简述为下面几种类型:

(1) 随动系统的最优综合设计

如前所述, 灵敏度是现代控制系统品质的重要指标, 也是随动系统和高精度仪表系统(精确度, 稳定指标, 过渡过程时间, 超调量等等)的重要指标之一。用灵敏度理论及其分析方法, 能够提出和解决带有变参数最小灵敏度系统结构的综合, 改善典型的随动系统稳定特性, 提高动态和静态精确度, 选择最大稳定特性的最优校正装置和结构方案〔40〕。

(2) 灵敏度受限制条件下的最优化

灵敏度受限制条件下的最优化包括性能指标的最优化, 此法的主要目的是选择系统的期望响应和灵敏度的折衷方案。当系统的参变量增加时, 则增加了计算量, 这时在计算机上编排程序时必须增加计算机的存储容量。

(3) 不灵敏系统的综合

不灵敏系统的综合分两步: 第一确定标称装置的最优控制, 第二实现灵敏度的最优化。在〔41〕中Henson和Womack提出“时域非敏感的特定最优控制系统”一文, 讨论了一个在时域进行设计的算法, 对于固定系统结构而参数发生慢变化或有一些非随机扰动的情況下, 方法是在最优指标中除状态偏差外加上一个灵敏度指标。

(4) 网络综合设计及信息

传递的最优化〔9, 42〕

(5) 参数测辨

用灵敏度函数描述被确定的性能指标,对输入信号进行最优综合,在文献[44]中进行了灵敏度分析,包括参数解的灵敏度和质量判据对参数的灵敏度。

(6) 最小灵敏度的最优控制的综合

系统最优化在很大程度上取决于研究者和设计者对系统特性知识熟悉的程度。对于许多物理过程,一般来说,能够用数学方法描述。模型的精确度在最优控制理论的实际应用中是特别重要的。利用灵敏度理论及其分析方法能够对最优控制模型的精确度进行综合分析,最后可以得出最小灵敏度最优控制的数学模型[8,45]。

(7) 准最优控制系统的综合

能够保持系统的性能指标接近于最优称为准最优。在文献[4,46]中详细论述了准最优控制性能的最优化。

(8) 计算机辅助网络设计的最优化

计算机辅助网络设计除了部分门电路外,由线性网络、非线性网络,其中包括差分放大器、有源滤波器、桥式电路等组成。利用灵敏度分析方法,能够对上述网络在频率域或时域进行最优综合设计和公差分析以及用计算机进行自动设计[47,48]。

(9) 对大系统进行最优综合设计

首先对分系统进行最优综合,以满足控制系统的最优性能,然后再对大系统进行最优综合,以满足大系统的最优性能。

经济系统是典型的大系统。灵敏度受限制的最优控制对国家制定经济政策得到成功的应用[20]。

灵敏度理论在自动机、诊断机、可靠性和其他工程控制领域方面,引起了各国专家们的很大注意,并且得到非常广泛的应用。

四 未来的发展动向

现代灵敏度理论的内容比较广泛,它研究各种现代系统及其装置性能指标与诸参数之间的关系。经过近十多年集中研究系统灵敏度理论,意识到灵敏度理论已不再考虑作为一门独立学科,而是作为现代工程控制论中的一个重要组成部分,其发展速度是异常惊人的。

就其未来的发展前途看来,在最近及其将来很难改变上述考虑,因为灵敏度理论及其分析方法,在现代各种控制系统及其装置性能最优化的综合分析中,已经得到了成功的应用。而且考虑到未来的发展需要,可以做出灵敏度理论及其分析方法的结论,即好的灵敏度理论、灵敏度分析方法、灵敏度点将继续应用于下述控制的诸方面:

1. 考虑到装置参数变化和不确定性而实现的最优控制系统的综合(不灵敏系统,准最优控制等等)。

2. 简化与解决各种控制问题中计算上的困难(大系统的控制,近似计算方法,网络的最优综合分析设计,改善精确度等等)。

3. 把在1和2中得到的结果与用不考虑灵敏度分析方法,例如自适应系统,极大极小,去耦,极点配置,统计方法,学习方法,不变性理论等得到的结果进行比较和相互联系。

4. 在用计算机产生灵敏度函数和其他灵敏度测度方面会有更进一步进展。

五 结 论

综上所述,灵敏度理论研究的主要工作在于贡献灵敏度函数的方法、比较灵敏度函数的方法、灵敏度理论方法的综合,而且将它们应用于各种最优化的系统中。

目前,最优化领域将沿着理论和实际应用相结合的途径进一步发展。就其近三十多年(1945年至今)发表的论文和著作看来,现代灵敏度理论及其分析方法对系统最优化已

经产生了重大的影响,而且正在继续应用于一切方面。工程控制论中的新方向——动态系统灵敏度理论,已使人们有可能在原则方面建立一致的看法,去解决自动控制领域中的各种最优化问题。

本文经北京邮电学院陈克文老师、沈阳自动化研究所王松才和潘裕焕同志审阅修改,特此致谢。

主要参考文献

- [1] S.P.Bingulac, IFAC 5th World Cong., 1972 Pt3
- [2] П.В.Кокотович, Р.С.Рутман, АИТ №4 1965
- [3] Нгуен Тхьонг Нго, АИТ №5 1971
- [4] J.B.Cruz, Jr., Feedback Systems 1972
- [5] A.L.Greensite, Control Theory Volume 1 Elements of Modern Control Theory 1970
- [6] Shinnars, Stanley M, Modern Control System Theory And Application 1972
- [7] В.В.Солодовников, Л.Н.Смирнов, Линейные автоматические системы 1969
- [8] C.T.Leondes, Control And Dynamic Systems Vol.9 1973
- [9] J.G.Graeme, G.E.Tobey, L.P.Huelsman Op-amps Design And Applications, 1971
- [10] В.А.Бесекерский, Динамический Синтез Автоматического Регулирования, 1970
- [11] R.Tomovic, M.Vukobratovic, General Sensitivity Theory, 1971
- [12] W.R.Perkins, C.B.Cruz, Jr., Engineering of Dynamic Systems, 1969
- [13] Ya.Z.Tsytkin, Adaptation And Learning in Automatic Systems, 1968
- [14] R.Tomovic, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems, 1963
- [15] Б.Н.Петров, П.Д.Крутько, ТК №2 1970
- [16] Р.С.Рутман, ТК №2, 1969
- [17] R.Y.Huang, Selected Papers on Analysis And Design of Linear Control Systems, February, 1974
- [18] Gelb A, Trans I.R.E., AC—7, №4, 1962
- [19] Р.С.Рутман, ТК №2 1965
- [20] 关肇直, 计算机应用与应用数学, 6, 1974
- [21] B.Pagurek, Int.J.Control, January 1965
- [22] Bernard Pagurek, IEEE Trans. Vol.AC—10, №2, 1965
- [23] H.Wistewhausen, IEEE Trans.Vol.AC—10, №4, 1965
- [24] P.Dorato, IEEE Trans.Vol.AC—8, №3, 1963
- [25] Ю.Н.Андреев, 计算机应用与应用数学 5, 1978
- [26] W.R.Perkins, J.B.Cruz, R.L.Gonzales, IEEE Trans.Vol.AC—13, №2 1968
- [27] G.A.Bekey, IEEE Trans.Vol. AC—11, №2, 1966
- [28] Е.Н.Розенвассер, АИТ №3 1967
- [29] R.Tomvic, G.A.Bekey, IEEE Trans. Vol. AC—11, №2 1966
- [30] David P.Lindorff, IEEE Trans. Vol. AC—8, №2 1963
- [31] R.K.Varshney, Proceedings of the third IFAC Symposium 1973
- [32] Розенвассер Е.Н.Юсунов Р.М, АИТ №4 1969
- [33] Porter W.A, Int.J.Control, Vol.5 №5 1967
- [34] Porter W.A, Int.J.Control, Vol.7, №5, 1967
- [35] М.Вукобратович, Д.Юричич, АИТ, №9, 1970
- [36] Kreidler E, Int.J.Control, Vol.6, №2, 1967
- [37] E.Kreindler, A.Jameson, Proceedings of the third IFAC Symposium 1973
- [38] I.N.Krutova, I.B.Yadykin, Proceedings of the third IFAC Symposium 1973
- [39] P.Kokotovic, M.Vuskovic, S.Bingulac, Proceedings Thid Congress of IFAC 1966
- [40] Н.А.Лакоты, Проектирование Следящих Систем 1978
- [41] T.F.Henson, B.F.Womack, Proceedings of the IFAC 75 USA 6TH World Congress Part I
- [42] L.T.Bruton, IEEE Trans.Vol, CAS—25, №.10, 1978
- [43] 楼启明 自动化 第一卷 第一期1977年 中国科学院自动化研究所
- [44] R.E.Goodson, M.P.Polis, Proceedings of the IFAC 75 USA 6TH World Congress Part I.
- [45] W.R.Perkins, J.B.Cruz, Jr., and R.L.Gonzales, IEEE Trans. Vol. AC—13, №2, 1968
- [46] C.S.Padilla, J.B.Cruz, Jr., IEEE Trans. Vol.AC—23, №3, 1978
- [47] D.A.Galahan, Computer-aided Network Design 1972
- [48] K.Inoue(Japan), E.J.Henley(USA), Proceedings of the IFAC 75 USA 6TH World Congress Part3