

# 6-6 型 Stewart 机器人的可操作性分析及其定义

饶青 白师贤

(北京工业大学基础部 100022)

**摘要** 本文根据并联机器人的特点,运用可操作度的概念,进一步提出了位置可操作度和姿态可操作度的定义.通过对位置反解直接求导,建立了 6-6 型 Stewart 机器人的位置、姿态和综合可操作度的公式,为并联机器人的运动学分析提供了依据.

**关键词** Stewart 机构,并联机器人,奇异点,位置可操作度,姿态可操作度,综合可操作度

## 1 引言

因为并联机器人具有刚度大、精度高等优点,近年来在机器人领域里引起了广泛的重视.在这些并联机器人中,对 Stewart 平台的分析及应用是最常见的一种.最早的 Stewart 机构是 Stewart 在 1965 年作为飞机模拟装置提出来的.直到 1978 年, Hunt 才提出 Stewart 机构可用作机器人的结构,并对其可行性进行了系统的研究.此后出现了许多类似的衍生机构.尽管这种类型机器人的应用日渐广泛,但是还存在许多重要的内在性质有待研究.到目前为止,对于并联机器人的一些基本性质(如正向位置求解、工作空间、影响系数等)已有过不少研究,但是对于能更深入地评价其运动学性能的可操作性等问题,由于其位置正解的复杂性,不能象串联机器人一样直接得出,目前还未有人涉及.在评价机器人的机械性能时,工作空间的大小常被用来作为一个重要的衡量指标.但是,由于在工作空间内不同的区域还存在着奇异点,所以有着相同的工作空间的机器人也还存在着不同的机械性能,在奇异点和靠近它的区域,机器人的机械性能都将退化,为了使空间内包括奇异点的每一位置的运动性能都得到定量的评价,需要一个更为精确的指标.为此,本文根据 Yoshikawa 等在 1983 年针对串联机器人提出的以某种方式使用雅可比矩阵来分析可操作性的原理,采用直接对位置反解求导的方法,推导出并联机器人的可操作度公式,并进一步将其细分为位置可操作度和姿态可操作度,因而能更贴切地定量反映机器人的位置和姿态运动控制的难易程度.

## 2 Stewart 机构坐标系的建立及变换矩阵

如图 1 所示,一个 Stewart 机构有 6 个分链在输出平台和基座平台之间提供并行的联系,每个分链有一个主动自由度.

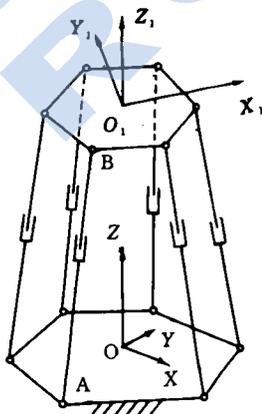


图 1 Stewart 机构

上、下平台(即输出平台和基座平台)是两个任意六边形,六边形的顶点固连着球形运动副,然后用六个可伸缩的杆件把它们对应连接起来.  $Z_1, Z$  轴分别垂直于上下平台,也即  $X_1-Y_1$  平面和  $X-Y$  平面分别和上下平台重合. 上下平台中各铰点在各自坐标中的位置由表 1 中的  $(a_i, b_i), (c_i, d_i)$  给出. 在下平台选取基坐标  $O-XYZ, Z$  轴垂直于下平台,下平台各铰点在基系中的坐标为:  $A_i(a_i, b_i, 0), i=1\sim 6$ . 在上平台上选取坐标系  $O_1-X_1Y_1Z_1, Z_1$  轴垂直于上平台,上平台各铰点在  $O_1-X_1Y_1Z_1$  坐标系中的坐标为  $B_i(c_i, d_i, 0)$ . 设机构在运动过程中,上平台的位置参数为  $(x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma)$ .  $x_c, y_c, z_c$  是上平台中心  $C$  点在基坐标系  $O-XYZ$  中的坐标,  $\alpha, \beta, \gamma$  是上平台绕  $Z, Y, X$  轴的顺序转角. 当坐标系  $O_1-X_1Y_1Z_1$  和  $O-XYZ$  中对应各轴相互平时为  $\alpha, \beta, \gamma$  的零点. 则输出平台各铰点在  $O-XYZ$  坐标系中的坐标  $B_i(x_i, y_i, z_i)$  应为

$$B_i = [M]B_{1i} \quad (i = 1 \sim 6) \quad (1)$$

式中

$$B_i = (x_i, y_i, z_i)^T, B_{1i} = (c_i, d_i, 0)^T$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \text{cac}\beta & -\text{sac}\beta & \text{s}\beta & x_c \\ \text{sac}\gamma + \text{cas}\beta\text{s}\gamma & \text{cac}\gamma - \text{sas}\beta\text{s}\gamma & -\text{c}\beta\text{s}\gamma & y_c \\ \text{sas}\gamma - \text{cas}\beta\text{c}\gamma & \text{cas}\gamma + \text{sas}\beta\text{c}\gamma & \text{c}\beta\text{c}\gamma & z_c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中  $c$  和  $s$  分别表示  $\cos$  和  $\sin$ .  $M_1, M_2, M_3$  分别为  $M$  中第一、二、三行所组成的  $1 \times 4$  阶行矩阵.

### 3 速度关系式的推导及雅可比矩阵的求解

若以 6 个可伸缩的杆件  $A_i B_i$  作为原动件,则并联机器人的位置反解表达式为

$$d_i = [(x_i - a_i)^2 + (y_i - b_i)^2 + z_i^2]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

其中  $d_i$  为主动杆  $A_i B_i$  的杆长. 根据(1)、(2)可知  $d_i$  是  $(x_c, y_c, z_c, \alpha, \beta, \gamma)$  的函数. 为建立 Stewart 机构的速度关系式,对(3)式求导得

$$d_i = \left[ \frac{\partial d_i}{\partial x_c} \frac{\partial d_i}{\partial y_c} \frac{\partial d_i}{\partial z_c} \frac{\partial d_i}{\partial \gamma} \frac{\partial d_i}{\partial \beta} \frac{\partial d_i}{\partial \alpha} \right] (\dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{z}_c, \dot{\gamma}, \dot{\beta}, \dot{\alpha})^T \quad (i \sim 1 \sim 6) \quad (4)$$

这里  $d_i$  是第  $i$  个可伸缩杆上液压缸的驱动速度,  $\dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{z}_c$  是输出平台中心  $C$  点的移动速度,  $\dot{\gamma}, \dot{\beta}, \dot{\alpha}$  是输出平台绕  $X, Y, Z$  轴的瞬时角速度. 可将(4)式写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \vdots \\ \dot{d}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial x_c} & \frac{\partial d_1}{\partial y_c} & \dots & \frac{\partial d_1}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial d_2}{\partial x_c} & \frac{\partial d_2}{\partial y_c} & \dots & \frac{\partial d_2}{\partial \alpha} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial d_6}{\partial x_c} & \frac{\partial d_6}{\partial y_c} & \dots & \frac{\partial d_6}{\partial \alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ \vdots \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\text{即} \quad \dot{D} = [A] \dot{x} \quad (6)$$

若  $[A]$  可逆,由(6)可得出速度正解的表达式为

$$\dot{x} = [A]^{-1} \dot{D} \quad (7)$$

[A]中的各元素可采用对  $d_i$  的表达式(3)直接求导来求得

$$A_{i1} = \frac{\partial d_i}{\partial x_c} = \frac{\partial d_i}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial x_c} = \frac{x_i - a_i}{\sqrt{(x_i - a_i)^2 + (y_i - b_i)^2 + z_i^2}} \cdot 1 = l_i$$

$$A_{i2} = \frac{\partial d_i}{\partial y_c} = \frac{\partial d_i}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial y_c} = m_i$$

$$A_{i3} = \frac{\partial d_i}{\partial z_c} = \frac{\partial d_i}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial z_c} = n_i$$

$$A_{i4} = \frac{\partial d_i}{\partial \gamma} = \frac{x_i - a_i}{d_i} \cdot \frac{\partial [M_1]}{\partial \gamma} \cdot B_{1i} + \frac{y_i - b_i}{d_i} \cdot \frac{\partial [M_2]}{\partial \gamma} \cdot B_{1i} + \frac{z_i}{d_i} \cdot \frac{\partial [M_3]}{\partial \gamma} \cdot B_{1i}$$

$$= (l_i, m_i, n_i) \cdot \frac{\partial [M]}{\partial \gamma} \cdot B_{1i} = U_i^T \cdot [M_\gamma] \cdot B_{1i}$$

同理

$$A_{i5} = \frac{\partial d_i}{\partial \beta} = (l_i, m_i, n_i) \cdot \frac{\partial [M]}{\partial \beta} \cdot B_{1i} = U_i^T \cdot [M_\beta] \cdot B_{1i}$$

$$A_{i6} = \frac{\partial d_i}{\partial \alpha} = (l_i, m_i, n_i) \cdot \frac{\partial [M]}{\partial \alpha} \cdot B_{1i} = U_i^T \cdot [M_\alpha] \cdot B_{1i}$$

其中  $l_i, m_i, n_i$  表示  $d_i$  杆的方向余弦;  $U_i = (l_i, m_i, n_i)^T$ .  $[M_\gamma][M_\beta][M_\alpha]$  分别表示矩阵  $[M]$  对  $\gamma, \beta, \alpha$  求导后的前三行所组成的  $3 \times 4$  阶矩阵.

在  $A_{ij}(j=1 \sim 6)$  中, 令  $i=1 \sim 6$  就可得到  $[A]$  矩阵的全部元素. 根据(7)可知雅可比矩阵

$$[J] = [A]^{-1} \quad (8)$$

在求出  $[A]$  后再根据逆矩阵的定义可得出  $[J]$  中的各元素.

#### 4 建立可操作性评价指标

根据(7), 设

$$\dot{x} = (V \ \omega)^T \quad (9)$$

$$V = (V_x \ V_y \ V_z)^T, \ \omega = (\omega_x \ \omega_y \ \omega_z)^T$$

所以

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} V \\ \omega \end{pmatrix} = [J] \dot{D} \quad (10)$$

$$V = [J_1] D \quad (11)$$

$$\omega = [J_2] D \quad (12)$$

其中  $[J_1]$  为  $[J]$  中上面三行所组成的一个  $3 \times 6$  阶矩阵;

$[J_2]$  为  $[J]$  中下面三行所组成的一个  $3 \times 6$  阶矩阵.

由(11), (12)可知  $D$  是分别通过  $[J_1], [J_2]$  来决定  $V$  和  $\omega$  的, 矩阵  $J_1, J_2$  描述了从原动件速度  $D$  到输出平台的速度  $V$  和角速  $\omega$  的变换. 因此, 雅可比矩阵可反映机器人的运动学性能, 它的齐次性程度是评价其可控性的关键因素, 这是因为变换阵  $J$  越均匀, 在工作空间内该位姿的微运动越易于控制. 因此, 我们定义并联机器人的

$$\text{位置可操作度 } W_p = \sqrt{\det(J_1 J_1^T)}$$

$$\text{姿态可操作度 } W_o = \sqrt{\det(J_2 J_2^T)}$$

$$\text{综合可操作度 } W = |\det J|$$

可操作度是反映机器人输出杆在位移和姿态方面的可操作能力的一个变量, 也是评价机器人

在某位姿的灵活性的一个指标. 由于机器人在处于奇异位形时会出现失控现象, 此时机器人将失去沿某一方向的活动能力, 灵活性也最小, 因此, 我们应当尽量避免接近奇异位形. 而上述指标能反映  $J$  矩阵的齐次性程度, 也即机器人远离奇异位形的程度, 并且在奇异位形时取最小值为 0. 因此它能恰当地表达对于输出杆的位移和姿态控制的灵敏度.

### 5 实例计算

设一 6-6 型 Stewart 平台的结构参数  $A_{oi}(a_i, b_i, 0), B_{oi}(c_i, d_i, 0)$  如表 1 中所示.

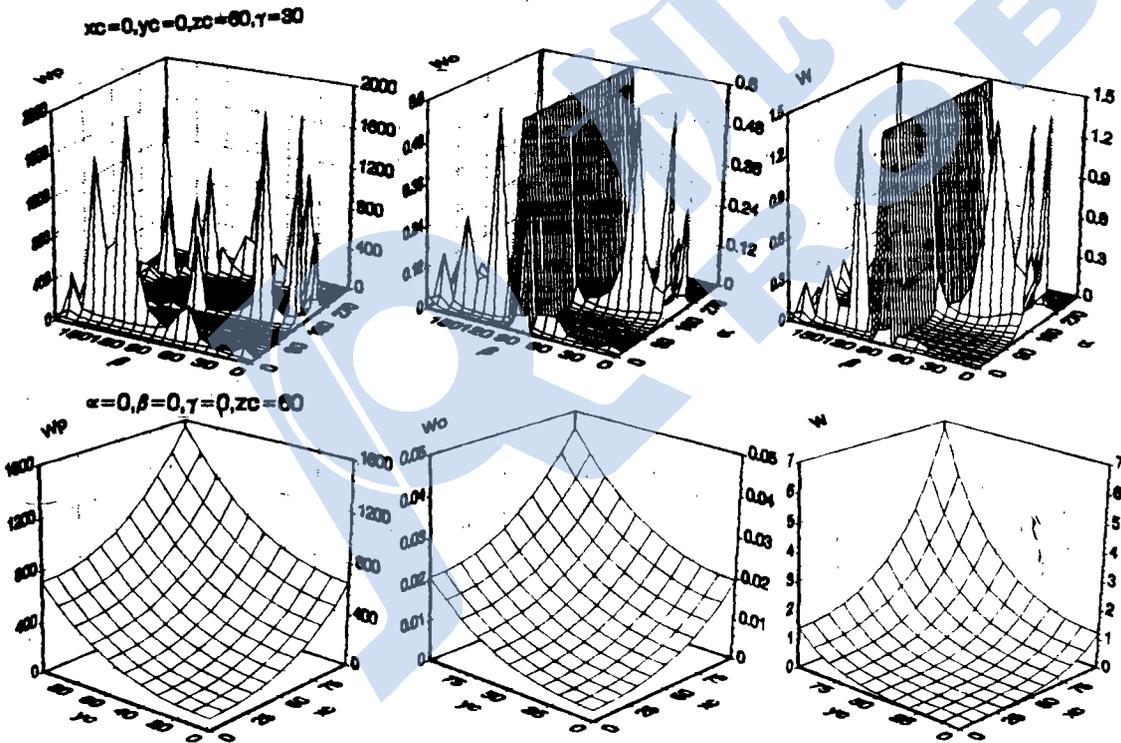
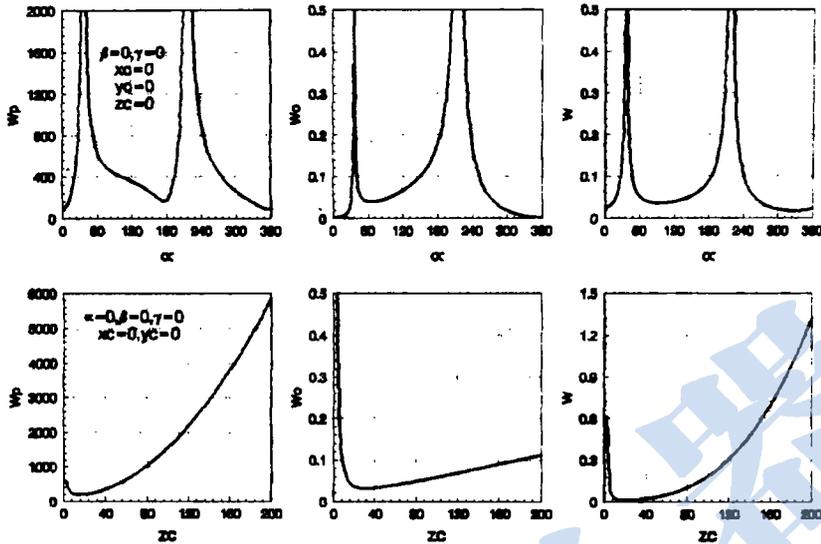


图 2 各种姿态时的可操作性

表 1 结构参数

$i$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$
1	-10	-10	-15	-12
2	10	-12	15	-12
3	15	12	25	10
4	8	24	15	30
5	-8	25	-16	24
6	-15	12	-20	5

下面我们就几种不同的情况来分析其操作性能.

(1) 输出平台的中心位置保持不变,平台在水平面上绕 Z 轴旋转.

(2) 输出平台保持姿态不变,而沿 Z 轴方向平动.

(3) 输出平台中心位置保持不变,平台可在水平面上分别绕 X, Y 轴旋转.

(4) 输出平台保持姿态不变,可沿 X 轴, Y 轴转动.

计算结果如下图,由图可知机构在各种姿态时的可操作性能,可为确定最佳工作位形提供参考依据.

### 参 考 文 献

- 1 Yoshikawa T. Manipulability of robotic mechanisms. The International Journal of Robotic Research, (2), 3-9.
- 2 Charles A K, Bruce E B. Dexterity measures for the design and control of kinematically redundant manipulators. The International Journal of Robotic Research, 1987,6(2):72-83.
- 3 Yang D C H, Lee T W. Feasibility study of a platform type of robotic manipulators from a kinematics viewpoint. ASME Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1984;106:189-198.
- 4 Mohamed M G, Duffy. A direct determination of the instantaneous kinematics of fully parallel robot manipulators. ASME Mechanism, Transmissions, and Automation in Design, 1985;107: 226-229.
- 5 潘凡忠,王洪波,黄 真. 并联 6-SPS 机器人的影响系数及其应用. 机器人, 1989,11(5):20-24.

## MANIPULABILITY ANALYSIS AND DEFINITION OF 6-SPS STEWART ROBOT

RAO Qing BAI Shixian

(Beijing University of Technology)

**Abstract** In accordance with the character of parallel robot manipulator, the concept of manipulability are used in this paper. Go a step further, the position manipulability and orientation manipulability are put forward. By direct derivation for position inverse solution, the formula of position and orientation manipulability of 6-SPS Stewart robot are established, which provide a new law for the parallel robot kinematic analysis.

**Key words** Stewart platform, parallel manipulator, singular point, position manipulability, orientation manipulability, synthesis manipulability

(饶 青, 30 岁, 男, 博士, 工程师. 研究领域: 机器人机构学, 机电一体化技术.)