不确定性机器人的鲁棒控制

徐建闽　周其节
（华南理工大学自动化系　广州　510641）
梁天培
（香港理工学院工程学院）

摘　要　本文研究不确定性刚性机器人的鲁棒控制问题．提出了一种新的鲁棒控制方案．控制器由两部分组成：第一部分为基于标称模型设计的计算力矩控制器；第二部分为基于 Lyapunov 方法设计的鲁棒补偿控制器，其作用是消除不确定性对跟踪性能的影响．本文证明了闭环系统的全局收敛性，仿真结果表明本方法对于存在外扰和模型不确定性的机器人系统是十分有效的．

关键词　机器人，鲁棒控制，不确定性，全局收敛性

1　引言

一些机器人的应用场合要求机械手准确地跟踪期望的轨迹．然而由于机器人是一类强耦合的非线性动力学系统，环境干扰与模型不准确等因素常常使精密控制器的设计变为一项艰巨的任务．在过去的十年里，有关不确定性机器人控制方面的研究已取得一些进展，大多数控制方法可粗略分为自适应控制与鲁棒控制两大类．自适应控制器的参数是不断向系统有更好的性能指标方向调整的[1-2]，而鲁棒控制器的参数则是相对确定的，其设计仅依赖于系统不确定性的界函数．在过去的年代中，以滑动模控制为代表的鲁棒设计方法较为突出，这种方法能够获得很强的鲁棒性．然而滑动模控制存在两个主要问题[3,4]：1)在趋近模态，控制系统依然对参数摄动与未建模动力学很敏感，因而难以保证它的控制性能；2)在滑动模态，在开关超曲面附近出现强烈的抖动现象有可能激发系统的未建模高频模态．Spong 和 Vidyasagar[5]提出了基于 Lyapunov 方法的鲁棒系统设计．在这种设计方法中，上述第一个问题已不存在而抖动现象比用滑动模设计的情况轻得多，因而这种方法有一定的应用价值．

本文提出一种新的基于 Lyapunov 理论的机器人鲁棒控制方法，与[5]不同之处在于本文采用新形式的计算力矩公式导出了广义误差方程，其阶由 $2n$ 降为 n，这大大方便了控制器的设计、运算和实现．所提的控制器由两部分组成：第一部分是计算力矩控制器，其作用为镇定标称的机器人系统；第二部分是鲁棒补偿控制器，其作用为消除不确定性对跟踪性能的影响．鲁棒补偿控制器的增益是根据不确定性的界而确定的．本文提出的方法对于存在外扰和模型不确定性的机器人系统有较强的鲁棒性，仿真结果证明了该方法的有效性．

本文其余部分组织如下：第二节简单介绍本文用到的数学工具与机器人模型及其特性；第三节为本文的主要结果，先介绍广义误差方程的推导，然后给出鲁棒控制器的设计理论；第四节给出二自由度机器人的仿真结果；最后一节为概括本文的结论．

收稿时间：1993－05－29

2 数学预备

2.1 符号、定义与引理[6]

记 R_+ 为非负实数集合，R^n 为 R 上的 n 维欧氏向量空间，该空间上定义的范数为 $\|x\| = \{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\}^{\frac{1}{2}}$，$R^{n\times n}$ 为 $n\times n$ 维实数矩阵空间，设 $A\in R^{n\times n}$，定义矩阵范数 $\|A\| = \{\lambda_{max}(A^TA)\}^{\frac{1}{2}}$，其中 $\lambda_{max}(\cdot)$ 为矩阵 $(\cdot)$ 的最大特征值. 定义标准的 Lebesgue 空间 L_∞ 和 L_2 如下：

$L_\infty^n(R_+) = \{f: R_+ \to R^n \mid f$ 为 Lebesgue 可测，且 $\|f\|_\infty < \infty\}$，其中 $\|f\|_\infty$ 为 L_∞^n-范数：

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{t\geq 0} \|f(t)\|$$

$$L_2^n(R_+) = \{f: R_+ \to R^n \mid f \text{ 为 Lebesgue 可测，且 } \|f\|_2 < \infty\}$$

其中 $\|f\|_2$ 为 L_2^n-范数：

$$\|f\|_2 := \left(\int_0^\infty \|f\|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

定义1 微分方程 $\dot{x} = f(x)$、$x(t_0) = x_0$ 的解. $x(t): R_+ \to R^n$ 称为一致终结有界的(uniformly ultimately bounded)，如果存在一个集合 S，和一个非负常数 $T(x_0, s)$，使 $x(t)\in s$，$\forall t \geq t_0 + T$.

设 $r(t)$，$h(t)$ 为时间函数，$H(s)$ 为 $h(t)$ 的拉氏变换函数，本文用 $H(s)r$ 表示 $(h * r)(t)$，其中 $*$ 代表卷积运算.

引理1 设 $H(s)$ 为 $n\times m$ 维严格真的且指数稳定的传递函数阵，$e = H(s)r$，若 $r\in L_2^m$，则有 $e\in L_2^n \cap L_\infty^n$，$\dot{e}\in L_2$，$e$ 为连续函数，当 $t\to\infty$，$e\to 0$；若还有 $r\to 0$，则 $\dot{e}\to 0$.

2.2 机器人模型与性质

基于欧拉-拉格朗日方程的 n 连杆刚性机器人动力学模型可表示为

$$D(q)\ddot{q} + h(q,\dot{q}) = \tau + f \tag{1}$$

其中 $q\in R^n$ 为关节的位移向量，$\tau\in R^n$ 为广义关节力矩向量，$D(q)\in R^{n\times n}$ 为机器人的惯性矩阵，$h(q,\dot{q})$ 为表征离心力，哥氏力和重力的非线性耦合项，$f\in R^n$ 为外部干扰. 模型(1)有如下式性质.

性质1 $D(q)$ 为正定对称阵，$D(q)$ 和 $D^{-1}(q)$ 对所有的 $q\in R^n$ 一致有界.

性质2 式(1)的左边可用一组适当选择的机器人的参数线性表示，即

$$D(q)\ddot{q} + h(q,\dot{q}) = y(q,\dot{q},\ddot{q})\theta \tag{2}$$

其中 $\theta\in R^m$ 为机器人参数，$y(q,\dot{q},\ddot{q})\in R^{n\times m}$ 为表征机器人运动轨迹的回归矩阵.

3 主要结果

3.1 广义误差方程

本文选用如下形式的鲁棒控制律：

$$\tau = \tau_0 + \tau_c \tag{3}$$

$$\tau_0 = D_0(q)(\ddot{q}_d - (K_1 + K_2)\dot{e} - K_2K_1e) + h_0(q,\dot{q}) \tag{4}$$

$$\tau_c = D_0(q)u \tag{5}$$

其中 q_d 是期望的机器人运动轨迹，$e := q - q_d$ 是跟踪误差，$D_0 = D_0^T > 0$，h_0 分别为 D 和 h 在标称参数值 θ_0 下的估计，K_1 和 K_2 为增益阵.

由(3)～(5)可知，控制力矩由两部分组成：τ_0 是基于标称模型的计算力矩控制信号，用于

镇定标称的机器人系统；τ_c 是鲁棒补偿控制信号，其中的非线性信号 u 为待定的参量，它将被设计来增强系统的鲁棒性.

式(1)的左边可写为

$$D\ddot{q}+h=D\ddot{e}+h+D(\ddot{q}_d-K_1\dot{e})+DK_1\dot{e}=D(\ddot{e}+K_1\dot{e})+y_d\theta$$

其中 $y_d:=y(q,\dot{q},\ddot{q}_d-K_1\dot{e})$. 上式推导中我们利用了 $D(\ddot{q}_d-K_1\dot{e})+h=y_d\theta$(由性质2).

将(3)～(5)代入(1)，则(1)的右边可写为

$$\begin{aligned}\tau+f&=D_0(\ddot{q}_d-K_1\dot{e})+h_0-D_0K_2(\dot{e}+K_1e)+D_0u+f\\&=y_d\theta_0-D_0k_2(\dot{e}+k_1e)+D_0u+f\end{aligned}$$

因此，式(1)可被重写为

$$D(\ddot{e}+K_1\dot{e})+y_d\theta=y_d\theta_0-D_0K_2(\dot{e}+K_1e)+D_0u+f \tag{6}$$

定义广义误差向量 $x:=\dot{e}+K_1e$，由式(6)可得

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-D^{-1}D_0K_2x-D^{-1}y_d\tilde{\theta}+D^{-1}D_0u+D^{-1}f\\&=-K_2x+u+\eta\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases}\tilde{\theta}=\theta-\theta_0 & (7)\\ \eta=(D^{-1}D_0-I)(u-K_2x)-D^{-1}y_d\tilde{\theta}+D^{-1}f & (8)\end{cases}$$

方程(7)即为广义误差方程，η 表征了由不精确的参数估计和外部干扰所引起的机器人系统的不确定性.

说明：在大多数机器人控制的文献中，x 被定义为 $x:=[e^{\mathrm{T}},\dot{e}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，所导出的误差方程是 $2n$ 阶的，而(7)只有 n 阶.

3.2　鲁棒控制器的设计

在控制器(3)～(5)中，需要设计的量为增益阵 K_1 和 K_2，以及控制参量 u. 在广义误差方程(7)中，η 是未知的，但是我们可以估计它对机器人跟踪性能影响的“最坏情况”的界. 为此，我们作如下假设：

假设1　$\|D^{-1}D_0-I\|\leqslant\alpha<1$，$\|y_d\tilde{\theta}\|<\beta$，$\|f\|<\gamma$，$\|D^{-1}\|\leqslant\bar{d}$，$\forall\, q\in R^n$.

定理1　对系统(7)，若 K_2 选择使

$$Q=K_2^{\mathrm{T}}P+PK_2>0 \tag{9}$$

其中 P 为正定阵. 选

$$u=\begin{cases}-\rho(x,t)\dfrac{Px}{\|Px\|}, & \|Px\|\neq 0\\ 0 & \|Px\|=0\end{cases} \tag{10}$$

其中

$$\rho(x,t)=(1-\alpha)^{-1}[\alpha\|K_2x\|+\bar{d}(\beta+\gamma)] \tag{11}$$

那么，$x\in L_2^n\cap L_\infty^n$，而且 $t\to\infty$，$x\to 0$.

证　取候选的 Lyapunov 函数为

$$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px \tag{12}$$

则 V 沿方程(7)的时间导数为

$$\dot{V}(t)=-x^{\mathrm{T}}Qx+2x^{\mathrm{T}}P(u+\eta) \tag{13}$$

为方便起见，记 $W=Px$，若不考虑因子 2，则(13)的第二项可写为 $W^{T}(u+\eta)$. 如果 $W=0$，该项为 0，而

$$\dot{V}(x)=-x^{T}Qx<0 \tag{14}$$

如果 $W\neq 0$，那么由(10)

$$u=-\rho\frac{W}{\|W\|} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}W^{T}(u+\eta)&=W^{T}(-\rho\frac{W}{\|W\|}+\eta)\\&=-\rho\|W\|+W^{T}\eta\\&\leqslant\|W\|(-\rho+\|\eta\|)\end{aligned} \tag{16}$$

根据假定 1，以及方程(8)、(15)和(11)，有

$$\begin{aligned}\|\eta\|&\leqslant\alpha\|u\|+\alpha\|K_2x\|+\bar{\partial}\|y_d\partial\|+\bar{\partial}\|f\|\\&\leqslant\alpha\rho+\alpha\|K_2x\|+\bar{\partial}(\beta+\gamma)=\rho\end{aligned} \tag{17}$$

由(16)和(17)可知 $W^{T}(u+\eta)\leqslant 0$，(13)变为

$$\dot{V}(x)\leqslant -x^{T}Qx<0 \tag{18}$$

这表明 $x\in L_2^n\cap L_\infty^n$，系统(7)在原点 $x=0$ 是全局渐近稳定的. [证毕]

说明：(18)意味着 $\dot{V}$ 沿着系统(7)的解轨迹为负定的. 然而，由于 u 是不连续的，故不能保证解在常规意义下的存在性. 但利用 Gutman[7] 的结果，我们可证明(7)的解在广义(集理论)意义下的存在性.

定理 2 若定理 1 的条件满足，K_1 选得使

$$\mathrm{Re}[\lambda_i(-K_1)]<0, i=1,2,\cdots,n \tag{19}$$

那么 $e,\dot{e}\to 0$(全局地).

证 广义误差 $x=\dot{e}+K_1e$ 可表为 $x=(SI+K_1)e$，由(19)我们知

$$H(s):=(sI+K_1)^{-1} \tag{20}$$

是严格真的且指数稳定的传递函数阵. 定理 1 导出了 $x\in L_2^n\cap L_\infty^n$ 和 $x\to 0$(全局地). 因此，由引理 1 立刻得到 $e,\dot{e}\to 0$(全局地). [证毕]

由(10)看出 u 是不连续的控制参量，会引起控制抖动. 为了消除这种现象，可以采用边界层技术，用连续控制律(21)逼近不连续的控制律(10)：

$$u=\left\{\begin{array}{l}-\rho(x,t)\dfrac{Px}{\|Px\|};\ \|Px\|\geqslant\varepsilon\\-\dfrac{\rho(x,t)}{\varepsilon}Px;\ \|Px\|<\varepsilon\end{array}\right\} \tag{21}$$

其中 $\varepsilon>0$ 为边界层宽度. 在后面的仿真中将会看到，适当地选取 ε，既能保证较高的控制精度，又能得到光滑的控制力矩.

定理 3 如果 u 取为(21)的形式，则系统(7)的解 $x(t)$ 为一致终结有界的.

证 参照附录 A.

4 仿真结果

本节以平面运动的两自由度机器人为例对所提出的鲁棒控制方法进行仿真. 机器人机械

手的模型取自[9].对应于模型(1)的系数矩阵为

$$D(q)=\begin{bmatrix}\theta_1+\theta_3+2\theta_2\cos q_2 & \theta_3+\theta_2\cos q_2\\ \theta_3+\theta_2\cos q_2 & \theta_2\end{bmatrix}$$

$$h(q,\dot{q})=\begin{bmatrix}-\theta_3(2\dot{q}_1\dot{q}_2+\dot{q}_2^2)\sin q_2\\ \theta_3\dot{q}_1^2\sin q_2\end{bmatrix}$$

其中

$$\theta=\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_1+(m_1/4+m_2)l_1^2\\ m_2l_1l_2/2\\ I_2+m_2l_2^2/4\end{bmatrix}$$

$m_i,l_i,I_i(i=1,2)$分别代表第i个连杆的质量,长度和转动惯量.设机械手的实际参数为

$$l_1=l_2=0.5\text{m},m_1=m_2=8\text{kg},\ I_1=I_2=0.4\text{kgm}^2$$

它们的标称值(先验估计值)取为

$$l_{10}=l_{20}=0.5\text{m},\ m_{10}=m_{20}=4\text{kg},\ I_{10}=I_{20}=0.2\text{kgm}^2$$

易知,$\theta_0=0.5\theta$,即有50%的参数估计误差.

设外部干扰为正弦函数:

$$f=[0.5\sin(t),\quad 0.5\sin(t)]^{\mathrm{T}}$$

机械手期望的运行轨迹为

$$q_d=[0.5\cos t,\quad 0.5\sin t]^{\mathrm{T}}(\text{rad})$$

仿真时,机械手的初始位置误差和初始速度均取为零.控制器参数取为

$$K_1=4I,K_2=2I,P=I$$

ρ可写成

$$\begin{aligned}\rho(x,t)&=(1-\alpha)^{-1}[\alpha\|K_2x\|+\bar{d}(\beta+\gamma)]\\&=c_1\|K_2x\|+c_2\end{aligned}$$

其中

$$c_1=\frac{\alpha}{1-\alpha},c_2=\frac{\bar{d}(\beta+\gamma)}{1-\alpha}$$

不确定性的界α可被粗略地估计为

$$\|D^{-1}D_0-I\|\leqslant 0.5=\alpha<1$$

即有$c_1=1$.其余的不确定性的界:β、γ和$\bar{d}$也可粗略地逐个估计.为避免不必要的麻烦,我们直接考虑c_2的选取.c_2代表不连续控制律u的增益.若c_2取得大,不连续控制作用的跳变幅值也大,这可增强系统的鲁棒性,减小跟踪误差,但也可以使抖动现象变得严重,故在实际选择中需要折衷考虑.本文仿真中我们取$c_2=2$.

采用常规的计算力矩控制方法的仿真结果如图1所示.由图可见,由于建模误差和外部干扰,计算力矩方法会产生较大的跟踪误差.采用本文提出的鲁棒控制方法的仿真结果如图2所示,其中u按(10)计算.本文还对增加边界层的鲁棒控制系统做了仿真研究.为了比较边界层宽度对跟踪精度与控制力矩的影响,我们分别取$\varepsilon=0.01$和$\varepsilon=0.1$,u按(21)算,仿真结果分别示于图3和图4.

5 结论

本文应用Lyapunov方法对机器人系统进行鲁棒性设计,提出一种新的鲁棒控制器,该控制器由两部分组成:第一部分为基于模型的计算力矩控制器,其作用为镇定标称系统;第二部

分为鲁棒补偿控制器，用于消除系统的不确定性对跟踪性能的影响. 通过理论分析与仿真我们可以得出如下的结论

1） 本文提出的鲁棒控制方案对具有不确定参数和外部干扰的机器人系统是十分有效的. 由图1(a)可见，常规的计算力矩控制方法的跟踪精度为0.25rad，而采用本文的鲁棒控制方法可使跟踪精度达到0.015rad.（见图2(a)）.

2） 增加边界层可以减弱或消除控制抖动现象，如图3和图4所示. 边界层越宽，控制力矩越趋向光滑，但跟踪误差会相应提高.

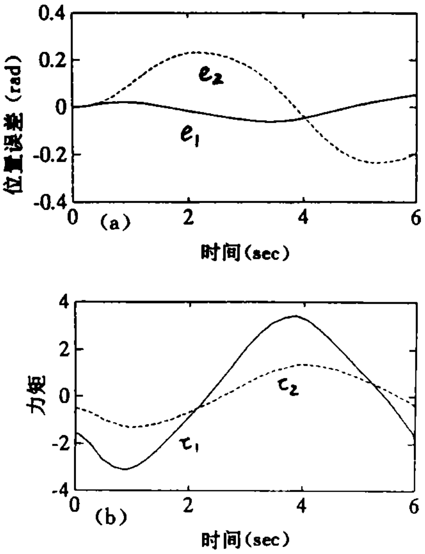

图1 计算力矩控制

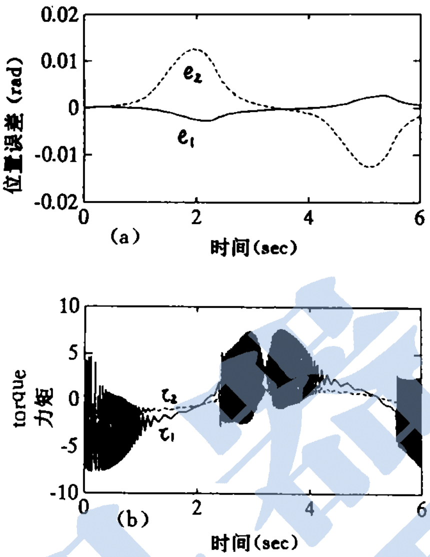

图2 鲁棒控制(无边界层)

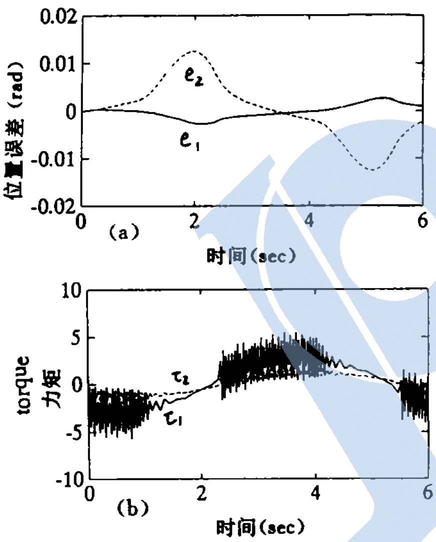

图3 鲁棒控制 $\varepsilon=0.01$

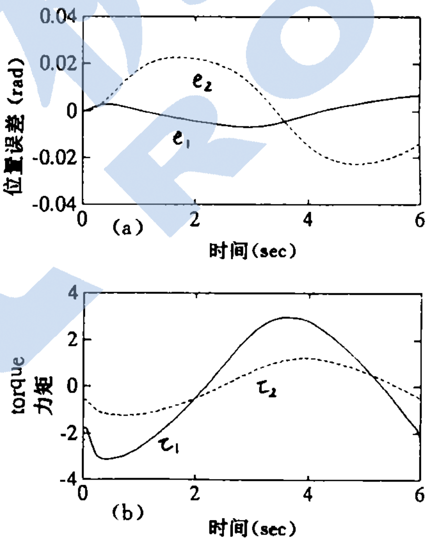

图4 鲁棒控制 $\varepsilon=0.1$

通过仿真看出，对于本文的例子，选取 $\varepsilon=0.1$ 既能保证满意的跟踪精度，又能消除控制抖

动现象. 因此，在实际的机器人鲁棒控制方案实施中，对控制信号增加一个边界层，并适当选取边界层的宽度是一项有意义的工作.

附录 A：　定理 3 的证明

若 $\|Px\| \geqslant \varepsilon$, $\|u\| = \rho$；若 $\|Px\| < \varepsilon$, $\|u\| = \frac{\rho}{\varepsilon}\|Px\| < \rho$　　(A1)

同样，选

$$V(x) = x^{\mathrm{T}}Px \tag{A2}$$

P 正定，类似于[8]中的讨论，我们可得到关于 $\dot{V}$ 的不等式

$$\dot{V}(x) = -x^{\mathrm{T}}Qx + 2x^{\mathrm{T}}P(u+\eta) \leqslant -x^{\mathrm{T}}Qx + 2(Px)^{\mathrm{T}}\left(u + \rho\frac{Px}{\|Px\|}\right) \tag{A3}$$

当 $\|Px\| < \varepsilon$，第二项变为

$$2(Px)^{\mathrm{T}}\left(-\frac{\rho}{\varepsilon}Px + \rho\frac{Px}{\|Px\|}\right) = 2\left(-\frac{\rho}{\varepsilon}\|Px\|^2 + \rho\|Px\|\right) \tag{A4}$$

此项当 $\|Px\| = \frac{\varepsilon}{2}$ 时达到其最大值 $\varepsilon\frac{\rho}{2}$，于是

$$\dot{V}(x) \leqslant -x^{\mathrm{T}}Qx + \frac{\varepsilon}{2}\rho \tag{A5}$$

利用关系式

$$\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 \leqslant x^{\mathrm{T}}Qx \leqslant \lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 \tag{A6}$$

其中 $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ 代表最小、最大特征值，故可看出当

$$\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 > \frac{\varepsilon}{2}\rho \tag{A7}$$

时，$\dot{V}<0$. (A7)等价于

$$\|x\| \geqslant \left[\frac{\varepsilon\rho}{2\lambda_{\min}(Q)}\right]^{\frac{1}{2}} := \omega \tag{A8}$$

记 $B(\omega)$ 为中心在 $x=0$，半径为 ω 的闭球，记 S 为包围闭球 $B(\omega)$ 的 V 的最小等值面所围之闭域(为椭球体). 显然在 S 的外部，$\dot{V}<0$. 故我们得出结论：若 $x(t_0)\in S$，那么(7)的解 $x(t)$ 将保留在 S 上；若 $x(t_0)\notin S$，那么，只要解轨迹 $x(t)\notin S$，有 $\dot{V}<0$，V 随 $x(t)$ 的运动而减小，$x(t)$ 可在有限的时间内到达 S 的边界 ∂S. 下面讨论到达 ∂S 的时间.

分别记 $S(k)$ 和 $S(k_0)$ 为在 $k=x^{\mathrm{T}}Px$ 和 $k_0=x_0^{\mathrm{T}}Px_0$ 而定义的 V 的等值面，定义常数

$$c_0 = \min\{x^{\mathrm{T}}Qx - \frac{\varepsilon}{2}\rho(x,t) \mid x \in S(k_0) - \mathrm{Int}(S)\} \tag{A9}$$

其中 Int(S) 表示 S 的内域. 因此，$x(t)$ 到达 ∂S 的时间为

$$\bar{t} = t_0 + \frac{k_0 - k}{c} := t_0 + T(x_0, S(k)) \tag{A10}$$

显然，当 $t \geqslant \bar{t}$ 时，$x(t)\in S$，由定义 1，系统(7)的解为一致终结有界的. [证毕]

参 考 文 献

1 Ortega R, Spong M W. Adaptive motion control of rigid robots, a tutorial. Automatica, 1989, **25**(6): 877—888.

2 Slotine J J E, Li W. Composite adaptive control of robot manipulators. Automatica, 1989, **25**(4): 509—519.

3 Zhu H A, Teo C L, Hong G S. Robust quasi-SMC of mechanical manipulators with dual-model pre-compensation. Proc of American Control Conference, San Francisco, 1993: 2511—2515.

4 Chen Y H, Eyo V A, Stalford H. Robust computed torque control of mechanical manipulators, non-adaptive versus adaptive. Proc of American Control Conference, 1988: 1327—1332.

5 Spong M W, Vidyasagar M. Robot dynamics and control. John Wiley & Sons, Inc New York, 1989: 216—240.

6 Desoer C A, Vidyasagar M. Feedback system: Input-output properties. New York, Academic, 1975.

7 Gutman S. Uncertain dynamical systems—a Lyapunov min-max approach. IEEE Trans Autom Contr, 1979, AC-**24**(1): 437—443.

8 Leitmann G. On the efficacy of nonlinear control uncertain linear systems. J Dyn Sys, Meas and Contr, 1981, **103**: 95—102.

9 Xu J M, Zhou Q J, Leung T P. Implicit adaptive inverse dynamics control of robot manipulators. Proc of IEEE Conf on Robotics and Automation, May, 1993, Atlanta, USA, 2: 334—339.

10 Zhou Q J, Xu J M, Leung T P. Globally stable adaptive controller of robot manipulators. Proc of IEEE Conf on Computers, Communication and Automation, 1993, Beijing, 4: 90—93.

ROBUST CONTROL OF UNCERTAIN ROBOT SYSTEMS

XU Jianmin ZHOU Qijie

(Department of Automation, South China University of Technology, Guangzhou, PRC)

T.P Leung

(Department of Mechanical Engineering, Hong Kong Polytechnic)

Abstract A robust control scheme for uncertain robot manipulators is developed in this paper. Using a new version of inverse dynamics control law, a reduced-order generalized error equation, which greatly facilitates the controller design, is first derived. The proposed scheme consists of two parts. The first part is the model-based computed torque controller which is used to stabilize the nominal robot system. The second part is a robust compensating controller which is designed to handle the uncertainty in the system. The global convergence of the proposed controller is established. Simulation results show the proposed scheme is effective to the robot systems with unknown parameters and external disturbance.

Key words Robot, robust control, uncertainty global convergence

(徐建闽,28岁,男. 研究领域:自动控制.)