文章编号: 1002-0446(1999) 04-0256-04

用近似同伦法确定空间 7H 连杆机构的装配构形*

张纪元　牛志纲
(上海海运学院机械系　200135)

摘　要: 对于含螺旋副(H)的空间连杆机构或机器人机构, 无法用有理化法将其分析与综合方程组化成多项式方程组, 因而不能用精确同伦法求解这些机构的多解问题. 本文提出近似同伦法并用该法首次解决了空间 7H 连杆机构的装配构形问题. 本文方法适用于求解任何含 H 副的空间连杆机构或机器人机构的多解问题.

关键词: 螺旋副; 空间连杆机构; 机器人; 装配构形; 同伦法
中图分类号: TP24　　文献标识码: B

1　引言

机构的装配构形问题、机器人机构的树状解问题和机构的多方案综合等问题统称为机构的多解问题. 多解问题是机构学研究中的重要难题之一. 同伦法[1]是目前解决机构多解问题的一个实用有效的方法. 当用同伦法求解机构多解问题时, 首先要求将机构的分析与综合方程组化成多项式方程组. 由于一个螺旋副(H) 中有两个运动变量: 角位移 θ 与线位移 d_i, 它们之间成线性关系. 除非增加辅助变量, 否则无法应用有理化的方法[2] 将含 H 副机构的分析与综合方程组化成多项式方程组, 因而就不能直接引用文[3]的实数同伦法求解这类机构的多解问题. 为此, 在文[3] 的基础上, 本文提出近似同伦法并用该法首次成功地解决了空间 7H 连杆机构的装配构形问题. 本文方法对求解含 H 副机构的多解问题是普遍适用.

2　近似同伦法

近似同伦法的核心思想是用多项式近似替代三角函数 $\cos x_i$ 和 $\sin x_i$ 不含其他超越函数的非线性方程组化成多项式方程组 $p(x)=0$; 然后用空数同伦法求得 $p(x)=0$ 的所有弧立实零点; 再以这些零点作为初值, 用詹重僖法(ZZX 法)[2] 求得原方程组的解.

2.1　三角函数的近似多项式

经试算表明, 下述二类近似多项式是有效的.

(1) 由契贝谢夫多项式导得的近似多项式

在契贝谢夫多项式[4]

$$\begin{cases}\cos(nx) = T_n(\cos x) \\ \sin(nx) = \sin x\, U_{n-1}(\cos x)\end{cases} \tag{1}$$

中, 令 $n=2$ 并取近似式: $\cos\frac{x}{2} \approx \cos a - \left(\frac{x}{2} - a\right)\sin a$; $\sin\frac{x}{2} \approx \sin a + \left(\frac{x}{2} - a\right)\cos a$, 可得:

---

* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目.
收稿日期: 1998-12-22

$$
\begin{cases}
\cos x = -\dfrac{1}{4}\cos(2a)x^2 + [a\cos(2a) - \sin(2a)]x + \cos(2a) + 2a\sin(2a) - a^2\cos(2a) \\
\sin x = -\dfrac{1}{4}\sin(2a)x^2 + [a\sin(2a) + \cos(2a)]x + \sin(2a) - 2a\cos(2a) - a^2\sin(2a)
\end{cases}
\tag{2}
$$

式中, a 为一实常数(下同).

在式(1)中, 令 $n=3$ 并取近似式: $\cos\dfrac{x}{3} \approx \cos a - \left(\dfrac{x}{3} - a\right)\sin a$; $\sin\dfrac{x}{3} \approx \sin a + \left(\dfrac{x}{3} - a\right)\cos a$, 可得:

$$
\begin{cases}
\cos x = \dfrac{4}{27}\sin a\cos^2 a x^3 + \dfrac{4}{9}(3\sin^2 a - 3a\sin a\cos a - 1)\cos a x^2 + [(1 - 4\cos^2 a)\sin a + \\
\qquad \dfrac{8}{3}a(1 - 3\sin^2 a)\cos a + 4a^2\sin a\cos^2 a]x + (1 - 4\sin^2 a)\cos a + \\
\qquad 3a(4\cos^2 a - 1)\sin a + 4a^2(3\sin^2 a - 1)\cos a - 4a^3\sin a\cos^2 a \\
\sin x = \dfrac{4}{27}\cos a\sin^2 a x^3 + \dfrac{4}{9}(1 - 3\cos^2 a - 3a\sin a\cos a)\sin a x^2 + [(1 - 4\sin^2 a)\cos a - \\
\qquad \dfrac{8}{3}a(1 - 3\cos^2 a)\sin a + 4a^2\cos a\sin^2 a]x + (4\cos^2 a - 1)\sin a - \\
\qquad 3a(4\cos^2 a - 3)\cos a + 4a^2(1 - 3\cos^2 a)\sin a - 4a^3\cos a\sin^2 a
\end{cases}
\tag{3}
$$

(2) 由幂级函数展开式导得的近似多项式

$$
\begin{cases}
\cos x = \cos a - \sin a(x - a) - \dfrac{\cos a}{2}(x - a)^2 + \dfrac{\sin a}{6}(x - a)^3 \\
\sin x = \sin a + \cos a(x - a) - \dfrac{\sin a}{2}(x - a)^2 - \dfrac{\cos a}{6}(x - a)^3
\end{cases}
\tag{4}
$$

若令 $x=0$, 则得:

$$
\begin{cases}
\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} \\
\sin x = x - \dfrac{x^3}{6}
\end{cases}
\tag{5}
$$

2.2　近似同伦法的算法步骤

设待解的只含三角函数 $\cos x_i$ 和 $\sin x_i$, 不含其他超越函数的非线性方程组为:

$$f_i(x) = 0, \quad i = 1, \cdots, n \tag{6}$$

用近似多项式(2)～(5)之一替代方程组(6)中的三角函数, 可得一多项式方程组, 记为:

$$p_i(x) = 0, \quad i = 1, \cdots, n \tag{7}$$

设多项式方程组(7)的齐次数为 HN, 用实数同伦法跟踪 HN 条同伦路径, 可得方程组(7)的 NR_0 个实零点 $x_0^{(k)}$ $(k=1, \cdots, NR_0)$, 然后以 $x_0^{(k)}$ $(k=1, \cdots, NR_0)$ 为初值, 用 ZZX 法求解原方程组(6), 得 $NR(NR \leq NR_0)$ 个实数解 x_j^* $(j=1, \cdots, NR_0)$.

基于 4 个理由: (1) 式(2)～(5)是三角函数较好的近似多项式; (2) 同伦法的实质是从任意出发点开始, 寻找原方程组(6)的解的较好近似解 $x_0^{(k)}$; (3) $HN \gg NR$; 4) ZZX 法有较大的收敛域; 在一般情况下, 用近似同伦法可以找到原方程组(6)的所有实数解, 至少可以找到绝大多数实数解. 实算表明: 这一结论是成立的.

3 空间 7H 连杆机构的装配构形

对图 1 所示的空间 7H 连杆机构, 设机构的结构参数为 h_i (i= 1, …, 6), h_0, a_{ij} (i,j = 10, 21, …, 65, 06) 和 p_i (i= 1, …, 6) (p_i 表示螺旋副的导程, 当螺旋副为右旋时取正值; 反之, 取负值); 螺旋副的初始线位移设为 $d_i^{(0)}$ (i = 0, 1, …, 6); 若用 θ_{ij} (ij = 10, 21, …, 65, 06) 表示螺旋副的角位移, 并设 θ_{10}为输入角位移, 则当各结构参数已知, 初始线位移 $d_i^{(0)}$ (i= 0, 1, …, 6) 和初始输入角位移 $\theta_{10}^{(0)}$ 取定后, 对应于输入螺旋副的一个位置 θ_{10}, 该 7H 连杆机构可能有不同的装配构形. 现用近似同伦法确定该机构的装配构形.

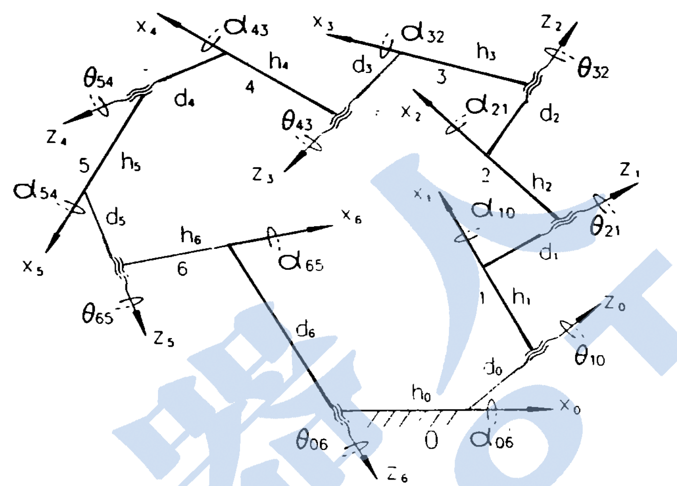

图 1 空间 7H 连杆机构

3.1 位置方程组

对图 1 所示的空间 7H 连杆机构有如下的闭环方程:

$$T_0 T_1 \cdots T_6 = I \tag{8}$$

式中, I 为 4 阶单位矩阵, T_i (i= 0, 1, …, 6) 为 D-H 矩阵, 其形式为:

$$T_i = T_i(d_i \theta_i, h_i \alpha_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & h_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & h_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

于是, 对应于闭环方程中的诸 D-H 矩阵可表示为: $T_i = T_i(d_i, \theta_{i+1,i}, h_{i+1}, \alpha_{i+1,i})$, i= 0, 1, …, 6; 当 $i+1=7$ 时, 以 0 替代(下同). 当初始位移 $d_i^{(0)}$ (i= 0, 1, …6) 和 $\theta_{10}^{(0)}$ 取定后, 首先通过求解对应的空间 7R 连杆机构求得其他螺旋副的初始角位移 $\theta_{i+1,i}^{(0)}$ (i= 0, 1, …, 6). 若令 $x_i = \theta_{i+1,i}$ (i= 0, 1, …, 6), 则在任一位置上, 螺旋副中的线位移和角位移之间成立下述关系式:

$$\begin{cases} x_i = \theta_{i+1,i} = \theta_{i+1,i}^{(0)} + \Delta\theta_i \\ d_i = d_i^{(0)} + \Delta d_i = d_i^{(0)} + (x_i - \theta_{i+1,i}^{(0)})/k_i \end{cases} \quad (i = 1, \cdots, 6) \tag{10}$$

式中 $k_j = 2\pi/p_j$ (j = 0, 1, …, 6).

若令闭环方程(8) 左边为矩阵 $A = A(x) = [a_{ij}(x)]$, 则 7H 机构的位置方程组可表示为

$$f_i(x) = 0 \qquad i = 1, \cdots, 6 \tag{11}$$

式中, $f_j(x) = a_{jj}(x) - 1, j = 1, 2, 3,\ f_{k+3}(x) = a_{k4}(x),\ k = 1, 2, 3$.

3.2 算例

设图 1 所示的空间 7H 连杆机构的结构参数分别为: h_1= 90, h_2= 115, h_3= 145, h_4= 155, h_5 = 105, h_6= 100, h_0= 55; a_{10}= 85, a_{21}= 94, a_{32}= 110, a_{43}= 115, a_{54}= 88, a_{65}= 85, a_{06}= 40; p_0= 3, p_1= −4, p_2= 3, p_3= 5, p_4= −4, p_5= 4, p_6= 3 取初始线位移为 $d_0^{(0)}$ = 100, $d_1^{(0)}$ = 110, $d_2^{(0)}$ = 85, $d_3^{(0)}$ = 190, $d_4^{(0)}$ = 86, $d_5^{(0)}$ = 125, $d_6^{(0)}$ = 90; 当取初始输入角位移 $\theta_{10}^{(0)}$ = 0 时, 求得相应的初始角位

移为; $\theta_{21}^{(0)}=-160.44933$, $\theta_{32}^{(0)}=29.716867$, $\theta_{43}^{(0)}=-26.168589$, $\theta_{54}^{(0)}=-158.00618$, $\theta_{65}^{(0)}=58.545944$, $\theta_{06}^{(0)}=16.424969$.

当用近似同伦法求解时, 三角函数的近似式取为 $\sin x_i \approx x_i$, $\cos x_i \approx 1-\frac{x_i^2}{2}$ $(i=1,\cdots,6)$, 并取 $\theta_{10}=30$, 跟踪 3840 条同伦路径, 求得表 1 所示的 9 个装配构形.

表 1　空间 7H 连杆机构的 9 个装配构形($\theta_{10}=30$)

No.	θ_{21}	θ_{32}	θ_{43}	θ_{54}	θ_{65}	θ_{06}
1	179.96788	86.900807	-144.24024	58.220882	-170.51912	22.866900
2	-171.63447	-40.786867	-136.08335	-47.518705	-121.31049	-118.53052
3	-87.267428	59.448301	-175.80895	-20.273649	76.492790	161.62334
4	51.276831	-140.58328	38.388662	-128.13951	121.44381	-166.89370
5	-36.816057	-128.22521	-169.30928	-133.07645	28.416138	-121.96015
6	24.214545	-158.57852	-17.504848	7.3721971	-171.72695	-8.4932858
7	173.26169	14.311557	-30.904508	-154.85128	52.629793	-5.3852033
8	-144.52034	-38.953527	17.801315	-115.89540	-9.1108869	84.723623
9	-179.76442	85.735053	-144.50094	59.636282	-171.04416	22.483536

4　结束语

本文主要结论如下:

(1) 提出或选择了三角函数的多项式近似表达式(2)—(5); (2) 提出近似同伦法; (3) 应用近似同伦法首次成功地解决了空间 7H 连杆机构的装配构形问题.

本文提出的方法对求解含 H 副的空间连杆机构或机器人机构的多解问题是普遍适用的.

参　考　文　献

1　王则柯, 高堂安. 同伦方法引论. 重庆出版社, 1990
2　张纪元, 沈守范. 计算机构学. 北京: 国防工业出版社, 1996
3　张纪元. 机构学中的实数同伦法. 上海海运学院学报(待发表), 1998. 7
4　王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概念. 科学出版社, 1979

TO DETERMINE THE CONFIGURATIONS OF SPATIAL 7H LINKAGE BY APPROXIMATE HOMOTOPY METHOD

ZHANG Jiyuan　　NIU Zhigang
(*Shanghai Maritime University*, *Shanghai*, 200135)

Abstract: For a spatial linkage or a robot mechanism with helical pairs (H), its analysis or synthesis system of equations can not be transformed into a system of polynomial equations by triangle alternate, so the multiple solution problem of this mechanism can not be solved by the accurate homotopy method. In this paper, an approximate homotopy method (AHM) is suggested and configuration problem of the spatial 7H linkage is first solved by AHM. The method of this paper is suitable for solving the multiple solution problem of the spatial linkage or robot mechanism with H-pairs.

Key words: Helical pairs; spatial linkages; robot; configurations; homotopy method

作者简介:
张纪元: 男, 49 岁, 副教授, 工学博士. 研究领域: 机器人机构学、计算机构学、机械优化设计.
牛志纲: 男, 23 岁, 硕士研究生. 研究领域: 机构学.