机器人运动分析的一组新等式推证及应用

黄石生 范 杰
(华南理工大学机械系 广州 510641)

摘 要 本文推证了一组刚体旋转矩阵与角速度矢的新等式.以该组等式为基础,文中提出并讨论了一种利用旋转矩阵的导数矩阵分析机器人运动的方法.所提方法在文中的运用表明,它可以取代以往过于繁琐的图解法和递推法,成为一种简明有效的机器人运动分析方法.作为该法应用结果,文中给出了由 n 个杆件构成的 n 个自由度机器人雅可比矩阵的一种简明封闭式,具有一定实用价值.这里的方法可作为一般刚体运动分析理论的补充.

关键词 机器人,刚体,旋转矩阵,运动分析

1 引言

机器人运动,即机器人各杆件作为刚体的一般运动.运动刚体的角位移不满足矢量的叠加性,故而不成其为矢量.这就给刚体,自然也给机器人运动分析带来种种不便.我们无法象求解质点线速度矢那样先求得一个位移矢,该矢的导数等于刚体转动的角速度矢;甚至刚体转动角速度矢的定义式中角位移增量矢的确切表达式也难以给出.我们可以注意到,以往求解刚体或机器人杆件角速度矢通常采用虽直观但非严格的图解法或虽严格但非紧凑的递推法,都没有直接利用其旋转矩阵的导数矩阵.这也许是导致刚体或机器人运动分析过于繁琐的原因之一,而以往的分析理论似乎一直忽略了这一点.事实上,附连于刚体或机器人杆件的坐标系一经确定,刚体或杆件的转动便由其旋转矩阵完全确定,即角速度矢的信息完全包含于旋转矩阵中.由此我们推断,刚体或杆件的角速度矢可以由其旋转矩阵的元素和元素的导数确定,因而可以且有必要确立一种既非图解也非递推的利用旋转矩阵和其导数矩阵的直接求解方法,以补充以往理论之不足,使分析过程简明化.本文讨论得出的结论与上述推断是一致的.我们将首先就定点运动刚体推证一组关于旋转矩阵、角位移增量矢、角速度矢的等式,然后将其应用于机器人运动分析.

2 一组等式推证

考虑定点运动刚体.设静坐标系$\{A\}$和附于刚体的动坐标系$\{B(t)\}$的原点与定点重合;系$\{A\}$各轴的单位矢为 ε_x、ε_y、ε_z;系$\{B\}$各轴的单位矢 ε_{xt}、ε_{yt}、ε_{zt}在$\{A\}$中的表示为:

$$[\varepsilon_{xt}\ \varepsilon_{yt}\ \varepsilon_{zt}] = [\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z]\begin{bmatrix} r_{11}(t) & r_{12}(t) & r_{13}(t) \\ r_{21}(t) & r_{22}(t) & r_{23}(t) \\ r_{31}(t) & r_{32}(t) & r_{33}(t) \end{bmatrix} = [\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z]R(t) \tag{1}$$

则刚体相对$\{A\}$的旋转矩阵为 $R(t)$,是正交矩阵.以下简记 $R=R(t)$,$r_{ij}=r_{ij}(t)$.

收稿时间:1993-01-24

2.1 旋转矩阵与其导数矩阵的等式

依据正交矩阵的性质，可推得旋转矩阵 R 与其导数矩阵 $\dot{R}=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ 的如下等式

$$\dot{R} = W^A R \tag{2}$$

及

$$\dot{R} = R W^B \tag{3}$$

式中

$$W^A = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_2 q_1^{\mathrm{T}} & \dot{q}_1 q_3^{\mathrm{T}} \\ \dot{q}_2 q_1^{\mathrm{T}} & 0 & -\dot{q}_3 q_2^{\mathrm{T}} \\ -\dot{q}_1 q_3^{\mathrm{T}} & \dot{q}_3 q_2^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}; \quad W^B = \begin{bmatrix} 0 & -p_2^{\mathrm{T}}\dot{p}_1 & p_1^{\mathrm{T}}\dot{p}_3 \\ p_2^{\mathrm{T}}\dot{p}_1 & 0 & -p_3^{\mathrm{T}}\dot{p}_2 \\ -p_1^{\mathrm{T}}\dot{p}_3 & p_3^{\mathrm{T}}\dot{p}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$q_i=[r_{i1} \quad r_{i2} \quad r_{i3}]$，$(i=1,2,3)$ 是 R 的行向量；

$p_j=[r_{1j} \quad r_{2j} \quad r_{3j}]$，$(j=1,2,3)$ 是 R 的列向量；R^{T} 表 R 的转置.

事实上，我们有

$$q_i q_j^{\mathrm{T}} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \quad i,j=1,2,3 \end{cases} \tag{4}$$

(4)式对 t 求导，得

$$\dot{q}_i q_i^{\mathrm{T}} = 0 \qquad i=1,2,3 \tag{5}$$

$$\dot{q}_i q_j^{\mathrm{T}} + \dot{q}_j q_i^{\mathrm{T}} = 0 \quad i \neq j \quad i,j=1,2,3 \tag{6}$$

将(5)、(6)式拼合成矩阵，得

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 q_1^{\mathrm{T}} & \dot{q}_1 q_2^{\mathrm{T}} & \dot{q}_1 q_3^{\mathrm{T}} \\ \dot{q}_2 q_1^{\mathrm{T}} & \dot{q}_2 q_2^{\mathrm{T}} & \dot{q}_2 q_3^{\mathrm{T}} \\ \dot{q}_3 q_1^{\mathrm{T}} & \dot{q}_3 q_2^{\mathrm{T}} & \dot{q}_3 q_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_2 q_1^{\mathrm{T}} & \dot{q}_1 q_3^{\mathrm{T}} \\ \dot{q}_2 q_1^{\mathrm{T}} & 0 & -\dot{q}_3 q_2^{\mathrm{T}} \\ -\dot{q}_1 q_3^{\mathrm{T}} & \dot{q}_3 q_2^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

即 $\dot{R}R^{\mathrm{T}}=W^A$ 或 $\dot{R}=W^A R$. 又

$$p_i^{\mathrm{T}} p_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \quad i,j=1,2,3 \end{cases} \tag{4'}$$

同理可证(3)式. 证毕.

2.2 角速度的方向矢及其表示

作为(2)，(3)式的一个简单应用，我们可以利用它们很容易证明定点运动刚体瞬时轴的存在. 为此，我们只须证明对于任意时刻 t 存在一条过定点的直线，该直线上的点在 t 时刻相对于静系$\{A\}$的速度为 0 矢.

证：设刚体上任意点 d 的位移矢在系$\{B(t)\}$中的坐标为 $s=[x \ y \ z]^{\mathrm{T}}$，则 d 点相对静系$\{A\}$的速度矢可表为

$$v = \dot{R}s = W^A R s = R W^B s \tag{8}$$

对于给定的 t，方程

$$W^A R s = 0 \tag{9}$$

或

$$R W^B s = 0 \tag{10}$$

的解确定了相对于静系$\{A\}$速度为 0 矢的点.

容易验证,矩阵 W^A 和 W^B 的秩均为 2,且方程(9),(10)的一个特解分别为

$$R^{\mathrm{T}}[\dot{q}_3q_2^{\mathrm{T}}\quad \dot{q}_1q_3^{\mathrm{T}}\quad \dot{q}_2q_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}};\qquad [p_3^{\mathrm{T}}\dot{p}_2\quad p_1^{\mathrm{T}}\dot{p}_3\quad p_2^{\mathrm{T}}\dot{p}_1]^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

即方程(9),(10)的解空间为直线.证毕.

该直线的方向矢即角速度的方向矢.它在$\{A\}$中的表示为

$$c[\varepsilon_x\quad \varepsilon_y\quad \varepsilon_z][\dot{q}_3q_2^{\mathrm{T}}\quad \dot{q}_1q_3^{\mathrm{T}}\quad \dot{q}_2q_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

在$\{B(t)\}$中的表示为 $c[\varepsilon_{xt}\quad \varepsilon_{yt}\quad \varepsilon_{zt}][p_3^{\mathrm{T}}\dot{p}_2\quad p_1^{\mathrm{T}}\dot{p}_3\quad p_2^{\mathrm{T}}\dot{p}_1]^{\mathrm{T}}$;$c$ 为任意实数.

欲确定角速度的大小,通常用图解法可形式上推得

$$v=\omega\times Rs=[\omega\times]Rs \tag{12}$$

式中 $\omega=[w_x\, w_y\, w_z]^{\mathrm{T}}$,是角速度矢在$\{A\}$中的坐标;"×"表矢积;

$[\omega\times]=\begin{bmatrix}0 & -w_z & w_y\\ w_z & 0 & -w_x\\ -w_y & w_x & 0\end{bmatrix}$,是 3×3 反对称阵.

比较(8)式和(12)式,似乎可推得

$$\omega=[\dot{q}_3q_2^{\mathrm{T}}\quad \dot{q}_1q_3^{\mathrm{T}}\quad \dot{q}_2q_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

但我们不想利用这种直观的结果.即使这样做了也还有问题没解决,如怎样解释 W^B? 下节我们将利用刚体角位移增量矢的表达式由角速度矢的定义严格地推得上式,顺带还将证明

$$[\dot{q}_3q_2^{\mathrm{T}}\quad \dot{q}_1q_3^{\mathrm{T}}\quad \dot{q}_2q_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}=R[p_3^{\mathrm{T}}\dot{p}_2\quad p_1^{\mathrm{T}}\dot{p}_3\quad p_2^{\mathrm{T}}\dot{p}_1]^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

2.3　角位移增量矢和角速度矢与旋转矩阵行、列向量的关系式

为求刚体 t 时刻的角位移增量矢,先求其 t 时刻的旋转增量矩阵.由(1)式有

t 时刻　　$[\varepsilon_{xt}\quad \varepsilon_{yt}\quad \varepsilon_{zt}]=[\varepsilon_x\quad \varepsilon_y\quad \varepsilon_z]R(t)$

$t+\Delta t$ 时刻　　$[\varepsilon_{x(t+\Delta t)}\quad \varepsilon_{y(t+\Delta t)}\quad \varepsilon_{z(t+\Delta t)}]=[\varepsilon_x\quad \varepsilon_y\quad \varepsilon_z]R(t+\Delta t)$

及　　$[\varepsilon_{x(t+\Delta t)}\quad \varepsilon_{y(t+\Delta t)}\quad \varepsilon_{z(t+\Delta t)}]=[\varepsilon_{xt}\quad \varepsilon_{yt}\quad \varepsilon_{zt}]R(\Delta t)$

于是有

$$R(t)R(\Delta t)=R(t+\Delta t)\ \text{或}\ R(\Delta t)=R(t)^{\mathrm{T}}R(t+\Delta t) \tag{15}$$

另一方面,刚体在 t 至 $t+\Delta t$ 期间的运动可等效为绕某一方向轴

$$[\varepsilon_{xt}\quad \varepsilon_{yt}\quad \varepsilon_{zt}][l_x\quad l_y\quad l_z]^{\mathrm{T}}$$

转动了角度 $\Delta\theta$,从而可用参数 l_x、l_y、l_z、$\Delta\theta$ 将 $R(\Delta t)$表示为[2]

$$R(\Delta t)=\begin{bmatrix}l_xl_xu\Delta\theta+\mathrm{c}\Delta\theta & l_xl_yu\Delta\theta-l_z\mathrm{s}\Delta\theta & l_xl_zu\Delta\theta+l_y\mathrm{s}\Delta\theta\\ l_yl_xu\Delta\theta+l_z\mathrm{s}\Delta\theta & l_yl_yu\Delta\theta+\mathrm{c}\Delta\theta & l_yl_zu\Delta\theta-l_x\mathrm{s}\Delta\theta\\ l_zl_xu\Delta\theta-l_y\mathrm{s}\Delta\theta & l_zl_yu\Delta\theta+l_x\mathrm{s}\Delta\theta & l_zl_zu\Delta\theta+\mathrm{c}\Delta\theta\end{bmatrix} \tag{16}$$

式中 $\mathrm{s}\Delta\theta=\sin\Delta\theta$;$\mathrm{c}\Delta\theta=\cos\Delta\theta$;$u\Delta\theta=1-\cos\Delta\theta$.

比较(16)式两边,且当 Δt 充分小时,有

$$\begin{bmatrix}r_{32}(\Delta t)-r_{23}(\Delta t)\\ r_{13}(\Delta t)-r_{31}(\Delta t)\\ r_{21}(\Delta t)-r_{12}(\Delta t)\end{bmatrix}=2\mathrm{s}\Delta\theta\begin{bmatrix}l_x\\ l_y\\ l_z\end{bmatrix}\approx 2\Delta\theta\begin{bmatrix}l_x\\ l_y\\ l_z\end{bmatrix} \tag{17}$$

(15)式代入(17)式,得

$$\Delta\theta\begin{bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p_3^{\mathrm{T}}(t)p_2(t+\Delta t) - p_2^{\mathrm{T}}(t)p_3(t+\Delta t) \\ p_1^{\mathrm{T}}(t)p_3(t+\Delta t) - p_3^{\mathrm{T}}(t)p_1(t+\Delta t) \\ p_2^{\mathrm{T}}(t)p_1(t+\Delta t) - p_1^{\mathrm{T}}(t)p_2(t+\Delta t) \end{bmatrix} \tag{18}$$

(18)式即刚体角位移增量矢在系$\{B(t)\}$中的表示.

欲求刚体角速度矢在$\{B(t)\}$中的表示,依其定义,取(18)式与 Δt 比值的极限即得

$$\omega^B = \operatorname*{limit}_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2\Delta t}\begin{bmatrix} p_3^{\mathrm{T}}(t)p_2(t+\Delta t) - p_2^{\mathrm{T}}(t)p_3(t+\Delta t) \\ p_1^{\mathrm{T}}(t)p_3(t+\Delta t) - p_3^{\mathrm{T}}(t)p_1(t+\Delta t) \\ p_1^{\mathrm{T}}(t)p_3(t+\Delta t) - p_1^{\mathrm{T}}(t)p_2(t+\Delta t) \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname*{limit}_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2\Delta t}\begin{bmatrix} p_3^{\mathrm{T}}(t)[p_2(t+\Delta t) - p_2(t)] - p_2^{\mathrm{T}}(t)[p_3(t+\Delta t) - p_3(t)] \\ p_1^{\mathrm{T}}(t)[p_3(t+\Delta t) - p_3(t)] - p_3^{\mathrm{T}}(t)[p_1(t+\Delta t) - p_1(t)] \\ p_2^{\mathrm{T}}(t)[p_1(t+\Delta t) - p_1(t)] - p_1^{\mathrm{T}}(t)[p_2(t+\Delta t) - p_2(t)] \end{bmatrix}$$

$$= [p_3^{\mathrm{T}}\dot{p}_2 \quad p_1^{\mathrm{T}}\dot{p}_3 \quad p_2^{\mathrm{T}}\dot{p}_1]^{\mathrm{T}} \tag{19}$$

上式推导中利用了(4′)式及下式

$$p_i^{\mathrm{T}}\dot{p}_j + p_j^{\mathrm{T}}\dot{p}_i = 0,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,3 \tag{20}$$

容易理解,角速度矢在$\{A\}$中的表示为

$$\omega^A = R(t)\omega^B$$

注意到

$$2\omega^B = \begin{bmatrix} r_{12}\dot{r}_{12} + r_{23}\dot{r}_{22} + r_{33}\dot{r}_{32} - r_{12}\dot{r}_{13} - r_{22}\dot{r}_{23} - r_{32}\dot{r}_{33} \\ r_{11}\dot{r}_{13} + r_{21}\dot{r}_{23} + r_{31}\dot{r}_{33} - r_{13}\dot{r}_{11} - r_{23}\dot{r}_{21} - r_{33}\dot{r}_{31} \\ r_{12}\dot{r}_{11} + r_{22}\dot{r}_{21} + r_{32}\dot{r}_{31} - r_{11}\dot{r}_{12} - r_{21}\dot{r}_{22} - r_{31}\dot{r}_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & r_{13} & -r_{12} \\ -r_{13} & 0 & r_{11} \\ r_{12} & -r_{11} & 0 \end{bmatrix}\dot{q}_1^{\mathrm{T}} + \begin{bmatrix} 0 & r_{23} & -r_{22} \\ -r_{23} & 0 & r_{21} \\ r_{22} & -r_{21} & 0 \end{bmatrix}\dot{q}_2^{\mathrm{T}} + \begin{bmatrix} 0 & r_{23} & -r_{32} \\ -r_{33} & 0 & r_{31} \\ r_{32} & -r_{31} & 0 \end{bmatrix}\dot{q}_3^{\mathrm{T}}$$

及 $q_i^{\mathrm{T}}\times q_i^{\mathrm{T}}=0$, $i=1,2,3$.

$$q_2^{\mathrm{T}} \times q_3^{\mathrm{T}} = q_1^{\mathrm{T}};\ q_3^{\mathrm{T}} \times q_1^{\mathrm{T}} = q_2^{\mathrm{T}};\ q_1^{\mathrm{T}} \times q_2^{\mathrm{T}} = q_3^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

有

$$\omega^A = [\dot{q}_3 q_2^T \quad \dot{q}_1 q_3^T \quad \dot{q}_2 q_1^T]^T \tag{22}$$

从而我们证明了(14)式。

类似地，我们也可以考虑刚体相对系$\{A\}$的旋转增量矩阵$R(\Delta t)=R(\Delta t+t)R(t)^{\mathrm{T}}$，先求得$\omega^A$，再通过变换阵$R(t)^{\mathrm{T}}$求得$\omega^B$。两种考虑推得的结果是一致的。然而有趣的是，前者涉及到的是旋转矩阵列运算，后者涉及到的是旋转矩阵行运算。

2.4 旋转矩阵关于数积和矢积运算的等式

下列两个等式是机器人运动分析用得到的

$$a \cdot b = Ra \times Rb \tag{23}$$

$$R(a \times b) = Ra \times Rb \tag{24}$$

式中a,b为3维向量.

(23)式显然，只证(24)式.即要证

$$R[a\times]b = [Ra\times]Rb$$

即
$$R[a\times]R^{\mathrm{T}} = [Ra\times]$$

即
$$R[a\times q_1^{\mathrm{T}} \quad a\times q_2^{\mathrm{T}} \quad a\times q_3^{\mathrm{T}}] = [Ra\times]$$

即
$$-R[q_1^{\mathrm{T}}\times a \quad q_2^{\mathrm{T}}\times a \quad q_3^{\mathrm{T}}\times a] = [Ra\times]$$

注意到(21)式，上式成立显然.证毕.

3 利用旋转矩阵求角速度矢的例

对于旋转矩阵由定轴欧拉角或动轴欧拉角表示的刚体，应用我们推得的公式(19)和(22)求解角速度矢是极方便的.这里只考虑定轴欧拉角的情形.记α、β、γ分别为定点运动刚体的偏转、俯仰、倾斜角[1]，则其旋转矩阵为

$$\begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \tag{25}$$

由我们的公式可求得角速度矢在$\{A\}$和$\{B(t)\}$中的表示分别为

$$\omega^A = \begin{bmatrix} 0 & -s\alpha & c\alpha c\beta \\ 0 & c\alpha & s\alpha c\beta \\ 1 & 0 & -s\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma}\end{bmatrix}; \quad \omega^B = \begin{bmatrix} -s\beta & 0 & 1 \\ c\beta s\gamma & c\gamma & 0 \\ c\beta c\gamma & -s\gamma & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma}\end{bmatrix} \tag{26}$$

以往的刚体运动分析文献中只是就动轴欧拉角的情形给出了角速度矢的表达式，这里我们一般地解决了利用旋转矩阵求角速度矢的问题.

4 机器人运动分析的例

考虑由n个杆件组成的有n个自由度的机器人，且仅以确定机器人雅可比矩阵为例.

机器人机构描述依照下述法则：附于第i个杆件上的坐标系称为系$\{i\}$，其Z坐标轴与第i转轴重合，其X坐标轴与第i转轴至第$i+1$转轴的公垂线重合；杆件$\{i\}$相对系$\{i-1\}$的位姿矩阵为

$$E_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_i^{i-1} & p_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

其中参数 θ_i，d_i，a_{i-1}，α_{i-1}采用 Denavit-Hartenberg 定义[1]；对于旋转关节，θ_i 为关节变量，其余为杆件参数；对于移动关节，d_i 为关节变量，其余为杆件参数；R_i^{i-1}、p_i 分别为系{i}相对系{$i-1$}的旋转矩阵和原点坐标.

记杆件 i 相对系{j}的位姿矩阵；旋转矩阵分别为 E_i^j，R_i^j，则

$$E_i^j = \begin{cases} E_{j-1}^j E_{j+2}^{j+1} \cdots E_i^{i-1} & i > j \\ I_{4\times 4} & i = j; \\ E_{j-1}^j E_{j-2}^{j-1} \cdots E_i^{i+1} & i < j \end{cases} \quad R_i^j = \begin{cases} R_{j+1}^j R_{j+2}^{j+1} \cdots R_i^{i-1} & i > j \\ I_{3\times 3} & i = j \\ R_{j-1}^j R_{j-2}^{j-1} \cdots R_i^{i+1} & i < j \end{cases}$$

我们将利用机器人各杆件的位姿矩阵和旋转矩阵直接给出其雅可比矩阵，即机器人终端执行器移动线速度和转动角速度与各关节变量变化速率的关系矩阵. 为此，考虑终端杆件 n 上增广坐标为 $b_n^n = [\,x\ y\ z\ 1]^{\mathrm{T}}$ 的任意点相对系{0}的增广坐标 b_n^0.

$$b_n^0 = E_n^0 b_n^n \tag{28}$$

利用(3)式，有

$$\begin{aligned} v_n^0 &= \dot{b}_n^0 \\ &= R_1^0 H_1 b_n^1 \dot{q}_1 + R_{02} H_2 b_n^2 \dot{q}_2 + \cdots + R_n^0 H_n b_n^n \dot{q}_n \\ &= \sum_1^n R_j^0 H_j b_n^j \dot{q}_j \end{aligned} \tag{29}$$

式中 $\dot{q}_j = \dot{\theta}_j + \dot{d}_j$.

$$H_j = \begin{bmatrix} 0 & -s_j & 0 & 0 \\ s_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-s_j \end{bmatrix}; \qquad s_j = \begin{cases} 1 & j\text{ 为旋转关节} \\ 0 & j\text{ 为移动关节} \end{cases}$$

又终端杆件 n 相对系(0)的旋转矩阵为 R_n^0，应用(22)式有

$$\begin{aligned} \omega_x &= [e_3^{\mathrm{T}}(R_1^0 w_1 R_n^1 \dot{q}_1 + R_2^0 w_2 R_n^2 \dot{q}_2 + \cdots + R_n^0 w_n \dot{q}_n)]R_0^n e_2 \\ &= e_3^{\mathrm{T}}(R_1^0 w_1 R_0^1 e_2 \dot{q}_1 + R_2^0 w_2 R_0^2 e_2 \dot{q}_2 + \cdots + R_n^0 w_n R_0^n e_2 \dot{q}_n) \\ &= -e_3^{\mathrm{T}} e_2 \times (R_1^0 w_1 \dot{q}_1 + R_2^0 w_2 \dot{q}_2 + \cdots + R_n^0 w_{n0}^{\ n} \dot{q}_n) \\ &= e_1^{\mathrm{T}} \sum_1^n R_j^0 w_j \dot{q}_j \end{aligned}$$

式中 $w_j = e_3 s_j$；$w_j = [w_j \times]$；e_j 为单位阵的第 j 列. 同理

$$\omega_y = e_2^{\mathrm{T}} \sum_1^n R_j^0 w_j \dot{q}_j$$

$$\omega_z = e_3^{\mathrm{T}} \sum_1^n R_j^0 w_j \dot{q}_j$$

即

$$\omega = \sum_1^n R_j^0 w_j \dot{q}_j \tag{30}$$

结合(29)、(30)式得

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = J\dot{q} \tag{31}$$

式中 $n\times n$ 矩阵 $J=\begin{bmatrix} R_1^0H_1b_n^1 & R_2^0H_2b_n^2\dots R_n^0H_nb_n^n \\ R_1^0w_1 & R_2^0w_2\dots R_n^0w_n \end{bmatrix}$ 即为所求.

5 结论

文中第 1 节推证的一组关于刚体旋转矩阵与角速度矢的等式在以往的文献中尚未见到，因而是新的. 该组等式构成了本文提出的机器人运动分析方法的基础. 所提方法在文中的运用表明，它完全可以取代以往过于繁琐的图解法和递推法，成为一种简明有效的机器人运动分析方法. 文中第 2、3 节运用该方法给出的角速度矢定轴欧拉角表达式和 n 自由度机器人雅可比矩阵简明实用，具有一定价值. 这里提出的方法可作为一般刚体运动分析理论的补充.

参 考 文 献

1 John J Craig. Introduction to robtics; mechanics control. Addison-Wesley, 1986.

2 王庭树. 机器人运动学与动力学. 西安电子科技大学出版社，1990.

3 北京大学数力系. 高等代数. 人民教育出版社，1979.

THE PROVING AND APPLICATION OF A NEW SET OF EQUATIONS FOR KINEMATIC ANALYSIS OF ROBOTS

HUANG Shisheng　FAN Jie

(*Huanan University of Science & Technology, Guangzhou* 510641)

Abstract　A new set of equations of rotation matrices and angular velocity vectors of rigid bodies have been proved in this paper. We have presented and discussed a method of kinematic analysis for robots by using the derivative matrices of their rotation matrices, which is based on the set of proved equations. The use of the method in the paper shows that it can replace the conventional, too complex method of diagram of recurrence as a concise one of kinematic analysis for robots. As a result of using the method, we have given a concise close form of expressing of Jacobian matrix for a general robot that consists of n links and has n degrees of positional freedom, which is of certain value. The presented method here can be generally regarded as a supplement of the theory of kinematic analysis for rigid bodies.

Key words　Robot, rigid bodies, rotation matrices, kinematic analysis

(黄石生，男，55 岁，教授. 研究领域：焊接机器人、焊接过程智能控制.)