

步进电机的最短时间控制

岛 聪司、黑川 泰良、大石 清

1. 序言

使用步进电机进行位置控制时，必需使它的步数和目标的位置数一致。并且在最短的时间内使转子达到目标位置。本研究应用最大值原理导出步进机的最短时间控制规律并以能量及相平面的观点进行了研究。

2. 最短时间控制规则的推导

2.1 问题的公式化

为使步进电机的最短时间控制问题公式化，先列出在稳定输入时轴的运动方程：

$$J\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + kf(n\theta) = 0$$

(1) 式中 n 为 1 相的极数， $f(n\theta)$ 表示角位移 θ 相对应的静矩分布，轴转一周需要 N 步，输入某相驱动脉冲以变量 u ($u = 0, 1, \dots, N/n - 1$) (2) 表示。假如 $f(n\theta)$ 不随 u 值变化，轴的运动方程为：

$$J\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + kf(n\theta - n(2\pi/N)u) \quad (3)$$

令

$t = t/\sqrt{nk/J}$, $\xi = \mu/2\sqrt{nk/J}$, $\Theta = n\theta$, $\dot{\Theta} = d\Theta/dt$, $v = N/n$, 将 (3) 式化为标准式即为：

$$\ddot{\Theta} + 2\xi\dot{\Theta} + f(\Theta - (2\pi/v)u) = 0 \quad (4)$$

v 是某一相极间的步数，即表示相位数。步进电机的输入变量只能取 2 式所示的离散值。在 v 一定时， n 的增加可由 v 的减小来补偿。为便于应用最大值原理，令 $\Theta = x_1$, $\dot{\Theta} = x_2$ 将 (4) 式改写成为下式：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2\xi x_2 - f(x_1 - (2\pi/v)u) \end{cases} \quad (5)$$

如用状态方程来描述最短时间控制问题，则为：“当轴的状态从初始值 $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ 过渡到终态 $x_1(T) = \text{指定}$, $x_2(T) = 0$ 时，用 $u = \{u: 0, 1, \dots, v-1\}$ 求出使评价函数 $J = \int_0^T dt$ 为最小的 $u(t)$ 。

2.2 最大值原理的使用

根据最大值原理，为使指标函数 J 最小，必须选取适当的 u 值使汉密顿函数 H 值最大，从 (5) 式构成汉密顿函数如下：

$$H = -1 + \psi_1 x_2 + \psi_2 (-2\xi x_2 - f(x_1 - (2\pi/v)u)) \quad (6)$$

为求得使 H 为最大值的 u ，取 (6) 式右端仅与 u 有关的项，可以选择使该项为最大的 u 值，设为 H^* 如下式所示：

$$H^* = -\psi_2 f(x_1 - (2\pi/v)u) \quad (7)$$

因为 u 只能取整数，为求使 H^* 为最大的 u 值可以将各个 u 值所对应的 H^* 值相比较。

令与 $u = 0, 1, \dots, v-1$ 相对应的 H^* 值分别为 $H_0, H_1^*, \dots, H_{v-1}^*$ ，从 7 式可见这些都是 ψ_2 和 x_1 ，(即角位移) 的函数。取纵轴 H^*/ψ_2 ($m = 0, 1, \dots, v-1$)，横轴为 x_1 ，在 $v=3$ 时，其函数关系如图 1 所示。在求 H^* 为最大值时，可使 ψ_2 为正时 H^*/ψ_2 最大， ψ_2 为负时 H^*/ψ_2 最小以选择 u 值。从图 1 中可见，无论 ψ_2 处正还是负， x_1 每增加 $2\pi/3$ ，可知 u 的值按 0, 1, 2, 0, ... 的顺序切换。在操作中，如果 ψ_2 的符号起了变化， u 的值必需随之变化。例如图 1 中 ① 的位置上 ψ_2 的符号如从正变到负， u 的值必须从 2 切换为 0。在 ② 的位置， u 的值必须从 0 到 2 相反顺序切换，这些后面再详述。

要知 ψ_2 各时间点上符号，就需解关于 ψ_2

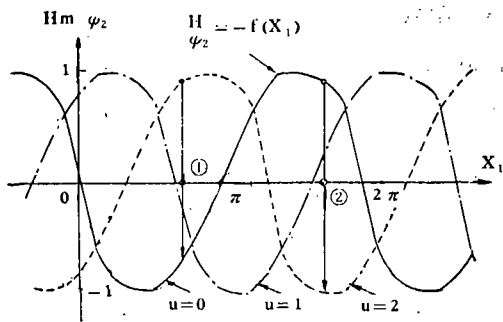


图1 u 给定时的 $H/\psi_2 \sim X_1$ 曲线

的微分方程。按最大值原理伴随矢量 ψ 的微分方程由下式给出。

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\partial H/\partial x_1 \\ \dot{\psi}_2 = -\partial H/\partial x_2 \end{cases} \quad (8)$$

现在假设静矩分布曲线 $f(x_1)$ 的规律为 $\sin x_1$ ，从(6)式可得：

$$H = -1 + \psi_1 x_2 + \psi_2 (-2\zeta x_2 - \sin(x_1 - 2\pi/v)u) \quad (9)$$

因此(8)式变为：

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2 \cos(x_1 - (2\pi/v)u) \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + 2\zeta\psi_2 \end{cases} \quad (10)$$

从(10)式， ψ_2 的微分方程可表示为：

$$\dot{\psi}_2 - 2\zeta\psi_2 + \psi_2 \cos(x_1 - 2\pi/v)u = 0 \quad (11)$$

如给定初值，从(5)式和图1的 u 值切换能解出 x_1, x_2 。从图1可知，当 $x_1 = 0$ 时， u 可取1或者2。但是如取目标位置为 x_1 的正方向， $u = 2$ 就要使轴反面旋转到目标位置，这是不适当的。

要解 x_1 就要从(11)式解出 ψ_2 ，可是 ψ_2 的边界条件不明确。据 $t = 0$ 时， $H = 0$ 的条件，当 $t = 0$ 时， ψ_2 的值从(9)式可得：

$$\begin{aligned} -1 + \psi_2(0)\sin((2\pi/v)u(0)) &= 0 \\ \therefore \psi_2(0) &= 1/\sin((2\pi/v)u(0)) \end{aligned} \quad (12)$$

因为 $\psi_2(0)$ 的值予先不知道，适当给与初值 $\psi_2(0)$ ，用初值 $\psi_2(0)$ 及(12)式解(11)式。如所解 x_1, x_2 不能达到予定的目标位置值，则修正事先给出的 $\psi_2(0)$ 的值，用这种试探的办

法来确定 $\psi_2(0)$ 可解出 ψ_2 。

2.3 最短时间控制规律

为了实现2.2节中所得出的控制规律，以下从定角切换，临界切换及最终定位切换三种情况来分析。并且假定步进电机按二相驱动方式工作，静矩分布曲线为正弦状。

(1) 定角切换

如在2.2节所述 u 的初值 $u(0) = 1$ ，在图1，当认为 $f(x_1) = \sin x_1$ ，已知初始切换必需在 $x_1 = \pi/2$ 的位置上。此后 x_1 每增到 $2\pi/3$ ， u 值按2、0、1的顺序切换，这意味着往往仅在相对于平衡点 $\pi/6$ 之前的位置上进行切换。在 $\psi_2 > 0$ 时，这样的切换称为正的定角切换。轴因正的定角切换而被最快地加速，因此接近系统的最高跟踪速度。

同样地，当 $\psi_2 < 0$ 时， u 值的切换在 x_1 达到相对于平衡点 $5\pi/6$ 的位置上进行，这种切换称为负的定角切换，此时轴被最快地减速。

相对于上述平衡点的切换位置取决于静矩分布曲线 $f(x_1)$ 的形状，而与 ζ 无关，这也是符合实际的。

(2) 临界切换

如使轴在正的定角切换中加速，而遇上中途 ψ_2 改变符号的情况，这时随着转移到负定角切换同时， u 值也必须切换。这个从正到负的定角切换变化时进行的切换称为临界切换。这时临界切换是否按原顺序进行，取决于 ψ_2 改变符号时 x_1 的位置。

(3) 最终定位切换

应用最大值原理得出的解，给出了使轴从静止位置到达目标位置的最短时间控制。但是轴不能保证停留在目标位置上。为了保证使轴停留在目标位置上，当轴处于平衡位置速度为零的瞬间，应该以此点为平衡点来切换 u 。这就是所谓的最终定位控制，这种切换称为定位切换。

从以上所述，步进电机最短时间控制方式的切换顺序如下所述：起动脉冲使轴起动 \rightarrow 正

的定角切换,使轴加速→临界切换,从加速切换向减速切换→负的定角切换,使轴减速→最终定位切换,使轴停止在目标位置上。

2.4 从能量观点研究最短时间控制规律

在2.2节及2.3节中,应用最大值原理导出了最短时间控制规律。下面从能量传递观点来研究这个问题。

步进电机依驱动脉冲的切换来改变平衡点位置,因此使轴反回平衡点的磁场恢复力的大小是不同的。这时可以认为切换前后瞬间轴的角速度不变,则切换瞬间动能不变而位能起了变化。

位能取决于轴的角位置,现在假定在相对于平衡点 $\Theta = \Theta_0$ 的位置进行切换,切换所给定的位能变化 ΔE 如下式所示:

$$\Delta E = \int_0^{\Theta_0 - 2\pi/3} f(\Theta) d\Theta - \int_0^{\Theta_0} f(\Theta) d\Theta \quad (13)$$

式中 ΔE 为负时表示从轴上得到位能。 ΔE 依 Θ_0 的值不同而不同,满足 ΔE 为极大或极小的 Θ_0 。值从 $d(\Delta E)/d\Theta_0 = 0$ 可求得,其公式为:

$$f(\Theta_0 - 2\pi/3) = f(\Theta_0) \quad (14)$$

在 $f(\Theta) = \sin\Theta$ 的场合,从(14)求得使 ΔE 最大的 $\Theta_0 = -\pi/6$,使 ΔE 最小的 $\Theta_0 = 5\pi/6$ 。当 $\Theta_0 = -\pi/6$ 时,轴从外部得到最大的位能,因此被最快地加速,相反当切换角度为 $5\pi/6$ 时,轴被外部夺去最大的位能而被最快地减速。 $-\pi/6$ 和 $5\pi/6$ 的值分别与2.3节中所讲的正、负定角切换角度一致,这可保证位能的交换为最大。

2.5 用相平面法研究最短时间控制

在文献资料1中步进电机在相平面上的状态如图2的3种曲线所示,其中实线、点划线、虚线分别对应于 $u=0, 1, 2$ 的轨道群,驱动脉冲切换时状态点进入相对应的轨道曲线。如图2所示这三群曲线族在相对于平衡点 $-\pi/6$ 和 $5\pi/6$ 处相接。并且, $u=0$ 和 $u=2$ 的轨道群与 $u=1$ 的轨道群一般在 $-\pi/6$ 和 $3\pi/6$ 之间向下切,在 $5\pi/6$ 和 $9\pi/6$ 之间向上切。根据这个

性质,在从初始值出发的轨道中间,在相对于平衡点 $-\pi/6$ 依次切换所得的轨道称 T_{opt}^+ , T_{opt}^+ 在相平面图的最上部。同样地,相对于平衡点 $5\pi/6$ 依次切换所得轨道称为 T_{opt}^- , T_{opt}^- 在这群轨道中处于相平面的最上部。

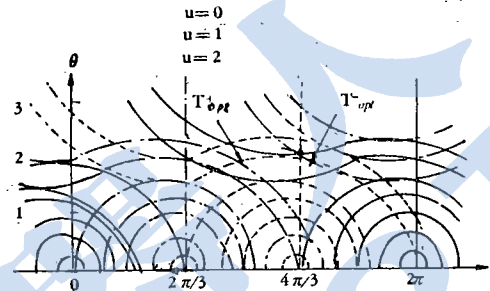


图2 最优过程的状态图

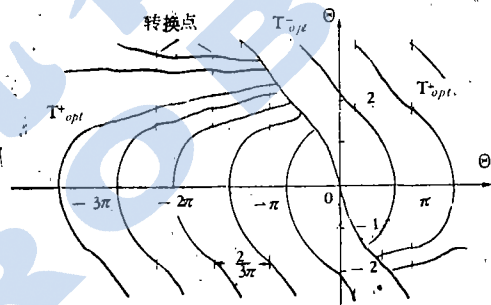


图3 以原点为目标值的最优轨道

令 T_{opt}^+ 和 T_{opt}^- 交点为 C_r ,从 T_{opt}^+ 的初始位置到 C_r 和从 T_{opt}^- 的 C_r 到目标值位置,轨道曲线被分成这二部分。图2的粗线显示了到目标值三个相位步的最短轨道。

以上结论对于任何一点初始值位置都是成立的。图3以原点为目标值,图中曲线描述了任意初始位置到原点的最短轨道。轨道上的细线是定角转换位置。在2.3节中所述的切换角 $-\pi/6$ 及 $5\pi/6$ 在相平面图上相应于轨道群上相接的位置,可见保证了最短轨道位于相平面图的最上部。另外,在2.3节中定义的临界切换点即是 T_{opt}^+ 和 T_{opt}^- 的交点 C_r 。这样

ψ_2 的值在 T_{opt}^- 的轨道分界处改变符号, 状态点在到达 T_{opt}^- 时 ψ_2 为零, 经过这一瞬间之后变为相反的符号。

3. 最短时间控制时步进电机的动态过程

3.1 临界切换的正负

如在 2.2 节中所述, 临界切换有顺向、逆向之分。例如在图 2 中, 当目标值为一个相位步时, 状态点从点划线的轨道进入实线轨道, 即必需从 $u=1$ 逆向切换到 $u=0$, 但是在目标值为 3 个相位步时, 就必需从 $u=0$ 顺向地切换到 $u=1$ 的轨道。临界切换的顺逆取决于临界切换点到目标值的距离。即设 T_{opt}^- 和 T_{opt}^+ 的轨道切换点的位置如图 4 所示那样, 到目标值小于 $\pi/6$ 为顺向加速切换, 小于 $3\pi/6$ 为逆向减速切换。以后每隔 $\pi/3$ 加速切换和减速切换互相交替, 因此如令 Θ_{CR} 为临界切换点到目标值的距离, Θ_{CR} 的值是否属于上面所说的那个范围之内就决定了临界切换是顺向或逆向。图 4 中例子是从点划线轨道进入虚线轨道, 是顺向切换。

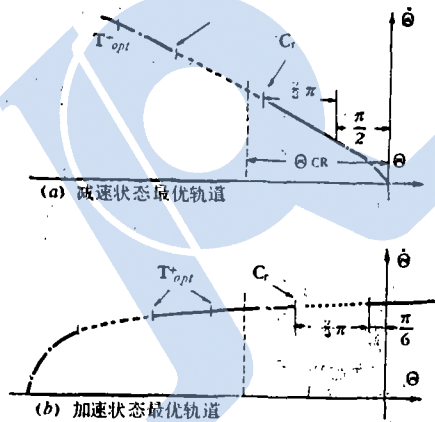


图 4 T_{opt}^+ 及 T_{opt}^- 的轨道

图 5 解决了 Θ_{CR} 的值与临界切换顺向逆向的关系, 图 5 最下一行数字同时记入了减速脉冲数 (不包含临界脉冲及最终定位脉冲)。因此当 $-\pi/6 < \Theta_{CR} < 0$ 时, 临界脉冲就能使轴

Θ_{CR}	$-\pi/6$	$-3\pi/6$	$-5\pi/6$	$-7\pi/6$...
临界切换方向	正	逆向	正向	逆向
减速脉冲次数	0	U	1	1

图 5 Θ_{CR} 值的范围和临界切换方向

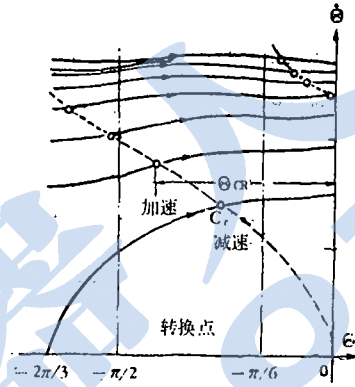


图 6 Θ_{CR} 值的变化

进目标位置。

3.2 临界切换角

在目标值步数小的场合, 由于目标位置 Θ_{CR} 值的不同, T_{opt}^+ 轨道是不能达到最高频率的, 因为最短轨道是每 $2\pi/3$ 的定角切换。这个轨道在 $-2\pi/3$ 到 0 之间, 图 6 加速和减速切换分别在 $-\pi/6$ 和 $-\pi/2$ 的位置上, 临界切换点由实线和虚线轨道的 C_r 给出。实线和虚线下面的数点分别与加速阶段及减速阶段的步数相关, 临界切换点第 n 条实线和第 m 条虚线交点给出时, 临界切换在到目标值距离 $(n+m+1)$ 步时其减速脉冲数与 m 个场合相对应 (但是 $-2\pi/3 \sim -\pi/2$ 之间与 $m+1$ 个相对应)。从图中可知随着目标值的增大, 临界切换点左移, 因而 Θ_{CR} 值增大, 可以认为目标值的步数大到一定程度时, Θ_{CR} 大致取一个定值 Θ_{CR} 。因此 Θ_{CR} 成为 θ 的函数。

图 7 表示了 Θ_{CR} 和 θ 的函数关系, 括号中的数字表示减速脉冲数。从图中可知当 θ 大约等于 0.1S 时, 只用一个临界脉冲就能使轴从最高频率状态进行到目标值。

4. 实验及研究

理论上的最佳控制在实际上是否可能实现或是容易实现往往是存在问题的，但上述的控制方法因为是定角切换所以最简单也最容易实现。下面用实例研究实际应用中控制规律的问题。

4.1 最短时间控制装置

图8是装置的框图。使用微计算机作为定角切换及临界切换脉冲指令装置，各部功能及规格要求如下：

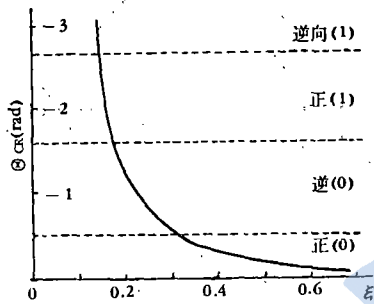


图7 $\xi \sim \theta_{CR}$ 函数曲线

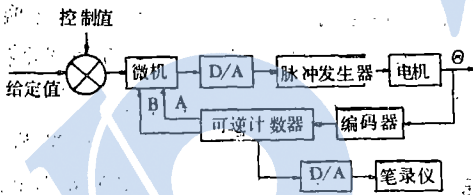


图8 实际装置框图

微计算机：循环周期1.6微秒，作为指令发生装置使用，使实际发出脉冲计数达到所定的数时发出脉冲指令。从计数器来的正负反馈脉冲分别通过优先插入，在不同的存储器中计数。

编码器：每转产生2000个脉冲，和步进电机同轴相连，可以检测轴的位置。

可逆计数器：在表示轴位置的同时，轴正转时从A线，反转时从B线输出脉冲序列（反转在最终定位切换时使用）。

D/A转换器：输入0~1023，输出0~

10V，根据计算机的命令进行转换。加速脉冲，减速脉冲和临界切换脉冲分别从各个通道输出，当临界切换逆方向时，其输出通道上的输出改变符号。

4.2 实验结果

D/A转换器接在可逆计数器上，轴的动态记录在记录仪上。图9是在目标值不大时显示了临界切换顺逆不同的情况。可以见到在达到目标值时的轻微振动情况，这可认为是最终定位切换时机械传动有滞后的原因引起的。

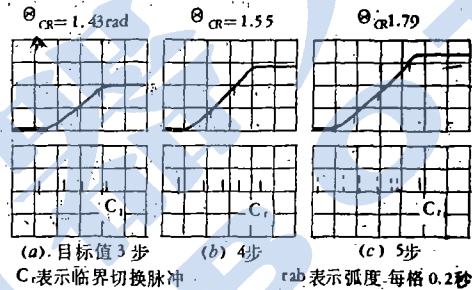


图9 给定 $\xi = 0.13$ 时， θ_{CR} 变化情况

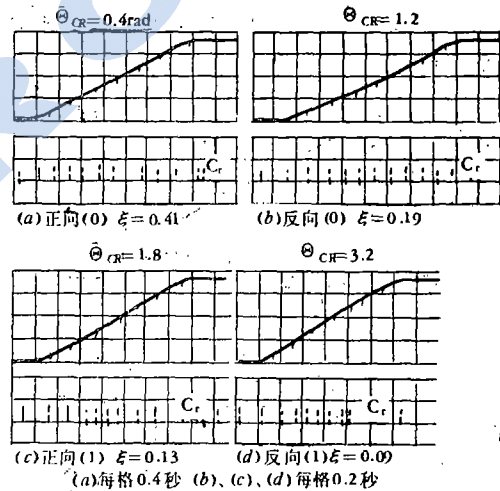


图10 到目标值为11步时，各种顺向逆向情况

图10是临界切换角 θ_{CR} 到达 θ_{CR} 时的轴的动态的结果。(a)是临界切换顺方向没有定角减速的场合，(b)是临界切换逆方向没有定角减速切换的场合，(c)是临界切换顺方

向定角减速切换的一种情况，(d)是临界切换逆方向定角减速切换的一种情况。

从这些结果，取 Θ_{CR} 的值与 ξ 相对立的各点，则可画出图11所示的 $\xi - \Theta_{CR}$ 曲线。和理论值偏移在很大程度上是由于库仑摩擦与系统回转部分不匹配引起的。

4.3 讨论

(1) 在使用步进电机进行位置控制时，可以考虑用定频率驱动方式及脉冲频率调制方式驱动等，但是不管哪种方式都必须考虑步进电机在高频和低频切换时的乱调失步现象。然而在上述定角切换的场合，实验结果表明不需要考虑这个问题。

(2) 最佳切换时临界切换角 Θ_{CR} 是 ξ 的函数。从而在 ξ 变动，或检测 ξ 存在误差的情况下，即使由此而产生的目标位置的振动是容许的，但在轴上是超过了，因此而产生目标值步数和实际步数之间的差是不能令人满意的。

图12是用实验求得的为使轴的步数和目标值步数相一致 ξ 的允许变化范围，斜线部分是

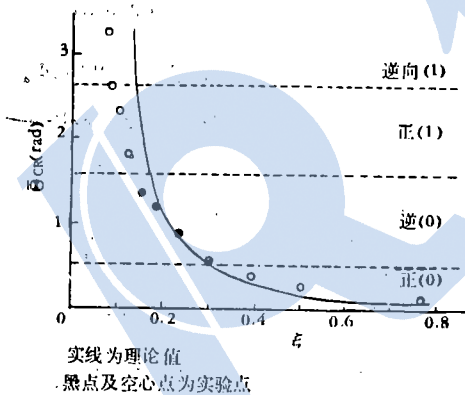


图11 实验点和理论值偏移

允许范围，斜线以外范围的步数比目标值或多或少而不一致。

从图12中看到，相对于最佳 ξ 值。 ξ 的变动范围在增大方向上比减小方向上范围大，特别在 $\xi = 0.13$ 附近， ξ 可增大范围变为无穷大。因此 ξ 在有可能变化的场合，应尽可能调整在区域的中央，这在实施最短切换时是比较适当的。

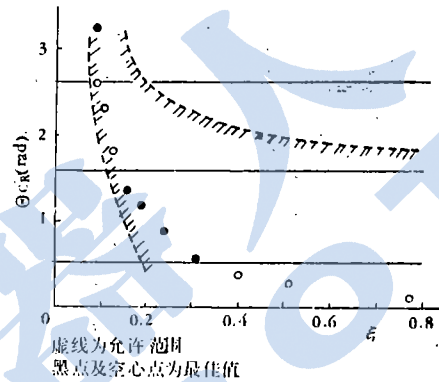


图12 允许范围曲线

5. 结论

本研究结论有如下三条：

(1) 所求得的最短时间控制规律常常在一定的角位置上被切换，而且这个角位置与 ξ 无关，在实际上使用方便。

(2) 根据这个控制规律步进电机的所谓高频低频的乱调失步现象可以不必担心。

(3) 因为在 ξ 小的地方允许变化范围也狭小，所以在 ξ 值可能变化的场合，希望 Θ_{CR} 的值应比最佳值取得大些，并调整在区域的中央。

(参考文献略)

李鑫森译自

日刊《系统与控制》1979·2

杨春森 校