

文章编号: 1002-0446(2000)02-0136-07

## 6-PSS 并联机器人操作机平动工作空间解析

姜 兵 黄 田

(天津大学机械工程学院 天津 300072)

摘 要: 提出一种求解 6-PSS 并联机器人操作机平动工作空间边界的解析方法. 该方法将平动工作空间问题归结为三类子空间边界求交问题, 即分别由六张球面片交集构成的上、下边界与由六张椭圆柱面交集构成的侧面边界的求交问题. 文中还提出主工作空间的概念和相应的解析表达式及工作空间评价指标, 并探讨了设计参数对评价指标的影响规律.

关键词: 并联机器人; 计算运动学; 工作空间; 曲面求交

中图分类号: TP24

文献标识码: B

### 1 引言

六自由度并联机器人操作机工作空间分析涉及已知尺度参数和关节变量变化范围, 确定末端执行器的实现位姿的能力. 在 Stewart 平台<sup>[1]</sup>位置空间解析法研究方面, 具有代表性的工作当属 Jo<sup>[2]</sup>提出后经 Gosselin<sup>[3]</sup>发展的几何法. 该方法将固定动平台姿态时的工作空间边界问题归结为对十二张球面片求交问题. Merlet<sup>[4]</sup>和 Ji<sup>[5]</sup>等人也做了类似工作. 黄田等人<sup>[6-10]</sup>利用曲面包络论, 将可实现给定姿态能力的操作机工作空间边界解析归结为对十二张变心球面族包络面的求交问题. 与 Stewart 平台相比, 6-PSS 并联机器人操作机<sup>[11]</sup>(图 1)具有工作空间呈规则柱状、各截面运动学性质等同且驱动装置不随动等优点, 但目前相关研究报导甚少.

本文研究求解 6-PSS 并联机器人操作机平动工作空间的解析方法. 该方法针对并联结构的特点, 将确定平动工作空间问题归结为三类子空间边界求交问题. 文中还提出主工作空间的概念, 相应的解析表达式, 以及工作空间评价指标, 同时探讨了尺度参数对这些指标的影响规律.

### 2 基本构型参数

如图 1 所示, 6-PSS 并联操作机由六根垂直布置的导轨构成的静平台、六条定长杆(后称支链)和动平台组成, 各支链一端用球铰(S)与滑块(P)连接, 另一端用球铰(S)与动平台连接, 各铰的联结顺序为  $C_i-A_i$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ ). 通过伺服驱动改变滑块位置, 可实现动平台六维空间运动.

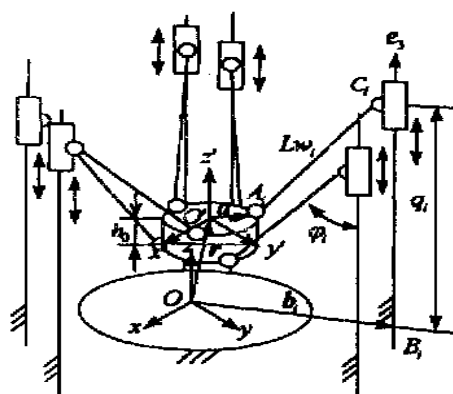


图 1 6-PSS 并联机器人操作机传动原理

· 国家自然科学基金(59775006)资助项目.

收稿日期: 1999-05-10

在动、静平台上建立连体系  $O'-x'y'z'$  和固定参考系  $O-xyz$  如图 1. 按  $O-B_i-C_i-A_i-O'$  构成六条单开链, 点  $O'$  在系  $O-xyz$  下的位矢  $r$  可表示为

$$r = b_i + q_i e_3 + L w_i - R a_{0i} \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (1)$$

式中  $q_i, w_i$ ——支链  $i$  的滑块位移量和支链单位矢量;

$b_i, a_{0i}$ ——点  $B_i, A_i$  在系  $O-xyz$  和系  $O'-x'y'z'$  下的度量;

$L$ ——支链长度;

$R$ ——系关于系  $O-xyz$  的姿态矩阵.

$$e_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

为满足结构对称性要求, 设点  $A_i, B_i$ , 布置如图 2, 且为了在不发生支链干涉条件下提高操作机的灵活度, 对动平台按奇偶铰点分层. 定义当动、静平台平行, 点  $O'$  位于  $z$  轴上, 且系  $O'-x'y'z'$  与系  $O-xyz$  间无旋转时的位形为初始位形. 据此, 点  $A_i, B_i$  在系  $O'-x'y'z'$  和  $O-xyz$  下的位矢可表示为

$$a_{0i} = L_k (n_{ai} - M v e_3) \quad b_i = \mu L_k n_{bi} \quad (2)$$

式中

$$n_{bi} = [\cos \beta_{1i} \ \sin \beta_{1i} \ 0]^T \quad n_{ai} = [\cos \beta_{2i} \ \sin \beta_{2i} \ 0]^T$$

$$\beta_{k, i=1,3,5} = \alpha_0 + \alpha_k + (i-1) \frac{\pi}{3} \quad \beta_{k, i=2,4,6} = \alpha_0 - \alpha_k + (i-2) \frac{\pi}{3}$$

$$v = \frac{h_0}{r_a} \quad k = \frac{r_a}{L} = \frac{\sin \mathcal{Q}}{\mu^2 - 2\mu \cos \alpha + 1} \quad \mu = \frac{r_b}{r_a} \quad \alpha = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$i = 1, 2, \dots, 6 \quad k = 1, 2 \quad M = \begin{cases} 0 & i = 1, 3, 5 \\ 1 & i = 2, 4, 6 \end{cases}$$

式中  $\beta_{1i}, \beta_{2i}, \alpha_0, \alpha_1$  和  $\alpha_2$ —— $b_i$  和  $a_{0i}$  的位置角, 初始角和分离角;

$r_a, r_b, h_0$ ——动、静平台半径及动平台分层偏距;

$\mu, \alpha$ ——静、动平台半径比和结构扭角;

$v$ ——动平台偏距与其半径之比;

$\mathcal{Q}$ ——初始位形下支链单位矢量  $w_i$  与  $z$  轴间夹角.

在此称  $\mu, \alpha, v$  和  $\mathcal{Q}$  为操作机的基本构型参数. 后续分析表明, 这些参数将直接影响工作空间的大小和形状.

### 3 工作空间解析

6-PSS 并联操作机的工作空间主要受到滑块行程和球铰转角两类几何约束的作用. 其中, 球铰转角约束是基于避免奇异位型<sup>[12]</sup>和球铰机械结构干涉两种考虑. 现分别针对这两类约束构造平动工作空间边界.

#### 3.1 受滑块行程约束的平动工作空间边界

如图 1 所示, 当仅考虑动平台平动, 且仅受滑块行程约束时, 点  $O'$  在  $O-xyz$  下的位矢  $r$  满

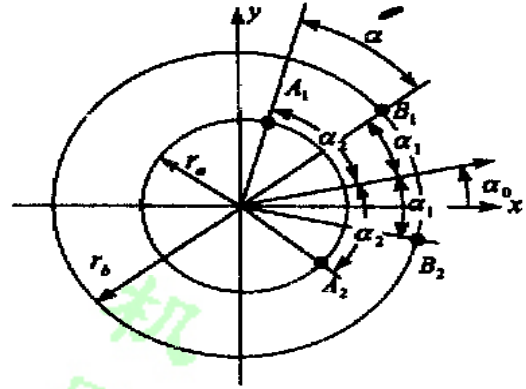


图 2 操作机平台尺度参数

足以  $r_{0i} = b_i + q_0 e_3 - a_{0i}(q_0 = q_{max}(q_{min}), q_{max}(q_{min}))$  为球心, 以  $L$  为半径的球面约束方程

$$S_{q_0}: r = r_{0i} + L w_i \tag{3}$$

由并联机构工作空间构成原理<sup>[8]</sup>可知, 操作机平动工作空间上、下界  $W_1$  和  $W_2$  可分别表示为 6 张球面片的交集

$$W_1 = \bigcap_{i=1}^6 S_{q_{max}, i}^+ \quad W_2 = \bigcap_{i=1}^6 S_{q_{min}, i}^- \tag{4}$$

在此,  $S^+$  表示球面片的外表面边界,  $S^-$  表示球面片的内表面边界.

### 3.2 受球铰转角约束的平动工作空间边界

为了充分利用球铰的许用锥角, 令其安装平面的外法矢与操作机处于初始位形时的单位矢量  $w_i$  重合. 在铰点  $C_i$  中心建立固定参考坐标系  $C_i - x_{ci}y_{ci}z_{ci}$ , 使得轴  $z_{ci}$  与  $w_i$  重合, 轴  $x_{ci}$  与  $w_i \times e_3$  同向, 轴  $y_{ci}$  满足右手准则, 并令系  $C_i - x_{ci}y_{ci}z_{ci}$  相对系  $O - xyz$  的姿态矩阵为  $R_{0i}$ . 于是, 支链在初始位形时的单位矢量  $w_i$  可表示为

$$w_i = ((\cos\beta_{2i} - \mu\cos\beta_{1i})k(\sin\beta_{2i} - \mu\sin\beta_{1i})k - \cos\vartheta_0)^T \tag{5}$$

同理, 在铰点  $A_i$  建立坐标系  $A_i - x_{ai}y_{ai}z_{ai}$ . 因系  $C_i - x_{ci}y_{ci}z_{ci}$  和系  $A_i - x_{ai}y_{ai}z_{ai}$  平行, 故矢量  $w$  在系  $O - xyz$  和系  $C_i - x_{ci}y_{ci}z_{ci}$  (或  $A_i - x_{ai}y_{ai}z_{ai}$ ) 下可分别表示为

$$w = R_{0i} w_i \quad w_i = [\cos\zeta \sin\eta \quad \sin\zeta \sin\eta \quad \cos\eta]^T \tag{6}$$

式中  $\zeta, \eta$  ——  $w$  在系  $C_i - x_{ci}y_{ci}z_{ci}$  (或  $A_i - x_{ai}y_{ai}z_{ai}$ ) 下的球坐标.

不失一般性, 略去单开链下标, 并将式(1) 改写为

$$r = L R_0 w + r_0 \tag{7}$$

考虑到工作边界必为约束起作用边界, 故当点  $O'$  达到工作空间边界时,  $w$  与  $w_0$  必满足如下圆锥面约束

$$w^T w_0 = \cos\delta_0, \quad \delta_0 = \min(\delta_b, \delta_a) \tag{8}$$

式中  $\delta_b, \delta_a$  —— 与滑块和动平台相连球铰的许用半锥角

化简式(8), 可得运动学位置逆解模型

$$q = c^T e_3 + \frac{L^2 - (c^T e_1)^2 - (c^T e_2)^2}{L} \tag{9}$$

式中  $c = r + a_0 - b, e_1 = (1 \ 0 \ 0)^T, e_2 = (0 \ 1 \ 0)^T$

将式(9)代入式(3),  $w$  可表示为

$$w = \frac{1}{L} (c^T e_1 \ c^T e_2 - \frac{L^2 - (c^T e_1)^2 - (c^T e_2)^2}{L})^T \tag{10}$$

显然,  $w$  与  $r$  的  $z$  坐标无关, 故受球铰约束时的平动工作空间是满足  $w^T w_0 - \cos\delta_0 = 0$  等式约束的柱体.

由式(7)知, 给定  $q$  后,  $O'$  的轨迹在以  $r_0$  矢端为球心,  $L$  为半径, 曲面坐标为  $\zeta \in [0 \ 2\pi]$  和  $\eta \in [0 \ \delta_0]$  的球冠上. 如图 3 所示, 当  $\eta = \delta_0$ , 球冠边界上任一点的单位矢量可表示为

$$w = R_0 [\cos\zeta \sin\delta_0 \quad \sin\zeta \sin\delta_0 \quad \cos\delta_0]^T \tag{11}$$

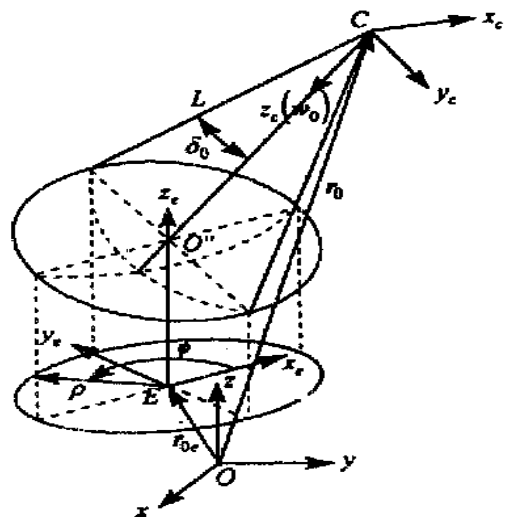


图 3 工作空间几何描述

即球冠边界是一半径为  $L \sin \delta_0$  的空间圆. 由投影几何知, 单开链工作子空间在任意  $z$  截面的边界为该圆在  $x$ - $y$  平面的投影边界, 即长半轴等于  $L \sin \delta_0$ , 短半轴等于  $L \sin \delta_0 \cos \varphi$ , 中心矢量为

$$\mathbf{r}_e = (\cos \delta_0 - 1)(\cos \beta_{2i} - \mu \cos \beta_{1i} \sin \beta_{2i} - \mu \sin \beta_{1i} \mathbf{0})^T + z \mathbf{e}_3 \quad (12)$$

的椭圆. 在  $\mathbf{r}_{0e}$  的矢端建立局部系  $E$ - $x_e y_e z_e$ , 使得轴  $x_e, y_e$  和  $z_e$  分别与椭圆长轴、短轴及  $z$  轴方向一致. 由图 3 可见, 因轴  $y_e$  与  $\omega$  在  $x$ - $y$  平面内的投影方向一致, 故可导出支链工作子空间  $S_3$  的边界方程

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{0e} + \mathbf{R}_y \mathbf{r}' \quad (13)$$

式中

$$\mathbf{R}_y = \begin{vmatrix} \cos \gamma_i & -\sin \gamma_i & 0 \\ \sin \gamma_i & \cos \gamma_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{r}' = \begin{vmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\rho = \frac{L \sin \delta_0 \cos \varphi}{1 - \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi} \quad \gamma_i = \tan^{-1} \left( \frac{\chi \tan \beta_{2i} + (-1)^i}{\chi + (-1)^i \tan \beta_{2i}} \right) - \frac{\pi}{2} \quad \chi = \frac{1 - \mu \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$\rho, \varphi$ —系  $E$ - $x_e y_e$  下的极坐标.

于是, 根据并联操作机的结构特点, 受球铰约束时工作空间边界可表示为

$$W_3 = \bigcap_{i=1}^6 S_{3i} \quad (14)$$

而总体平动工作空间则可表示  $W_i (i=1, 2, 3)$  的交集

$$W = \bigcap_{i=1}^3 W_i \quad (15)$$

### 3.3 求解关于任意截面工作空间边界的算法

由上述分析可见, 在任意  $z$  截面内, 平动工作空间是若干圆和椭圆所包含区域的交集, 且边界方程是以支链的局部坐标表示的. 为了构造总体工作空间边界, 需要实施局部至总体的坐标变换.

给定  $z$  坐标后, 任意单开链在总体坐标系  $O$ - $xyz$  下的边界方程可表示为

$$\begin{cases} (\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_0)^T (\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_0) = L^2 - (z - z_0)^2 & \text{若边界满足圆方程} \\ (\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_{0e})^T (\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_{0e}) = \rho^2 & \text{若边界满足椭圆方程} \end{cases} \quad (16)$$

式中

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\rho} (\cos \theta \quad \sin \theta)^T \quad \hat{\mathbf{r}}_0 = (x_0 \quad y_0)^T \quad \hat{\mathbf{r}}_{0e} = (x_{0e} \quad y_{0e})^T$$

$\hat{\rho}, \theta$ —系  $O$ - $xy$  下的极坐标, 且  $\varphi$  满足方程  $\tan \theta - \frac{y_{0e} + \rho \sin(\varphi - \gamma)}{x_{0e} + \rho \cos(\varphi - \gamma)} = 0$ .

据此, 式(16)可表示为形如

$$\hat{\rho}^2 + B \hat{\rho} + C = 0 \quad (17)$$

的二次方程. 式中

$$\begin{cases} B = -2x_0 \cos \theta - 2y_0 \sin \theta, C = x_0^2 + y_0^2 + (z - z_0)^2 - L^2 & \text{若边界满足圆方程} \\ B = -2x_{0e} \cos \theta - 2y_{0e} \sin \theta, C = x_{0e}^2 + y_{0e}^2 - \rho^2 & \text{若边界满足椭圆方程} \end{cases}$$

据此, 可构造求解工作空间边界的算法如下:

- (1) 给定  $z$  和极角  $\theta$ , 由式(17)求解单开链工作子空间边界的极径  $\hat{\rho}$ ;
- (2) 若  $\hat{\rho}$  有一个大于或等于零的实根, 则取该值; 若  $\hat{\rho}$  有两个大于或等于零的实根, 则取  $\hat{\rho} = \min(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2)$ ; 若  $\hat{\rho}$  无实根, 则令  $\hat{\rho} = +\infty$ ;

- (3) 取所有单开链工作子空间边界极径的最小值  $\hat{\rho}_{\min}$  为关于  $\theta$  的极径;
- (4) 对  $z$  和  $\theta$  循环, 即可求出整个工作空间边界.

#### 4 设计参数对工作空间的影响规律

为了有效的评价工作空间的大小, 定义与平动工作空间侧面边界内切的圆柱体为主工作空间. 易导出其半径和高分别为

$$r = L(\sin(\delta_0 + \varphi_0) - \sin\varphi_0) \tag{18a}$$

$$h = s - L(1 - (2\sin\varphi_0 - \sin(\varphi_0 + \delta_0))^2 - \cos(\varphi_0 + \delta_0)) - 2v r_a \tag{18b}$$

式中  $s = q_{\max} - q_{\min}$

若设主工作空间与操作机体积比越大构型越优, 则可定义如下评价指标

$$\epsilon_1 = \frac{r}{r_b}, \quad \epsilon_2 = \frac{s-h}{r_b} \tag{19}$$

且应设计构型参数使得  $\epsilon_1 \rightarrow \max, \epsilon_2 \rightarrow \min$ . 由式(2), (18)和(19)可得

$$\epsilon_1 = \frac{1}{(1/\mu - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha(\csc\varphi_0 \sin(\delta_0 + \varphi_0) - 1)} \tag{20}$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{(1/\mu - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha \csc\varphi_0}$$

$$(1 - (2\sin\varphi_0 - \sin(\varphi_0 + \delta_0))^2 - \cos(\varphi_0 + \delta_0)) + 2v/\mu \tag{21}$$

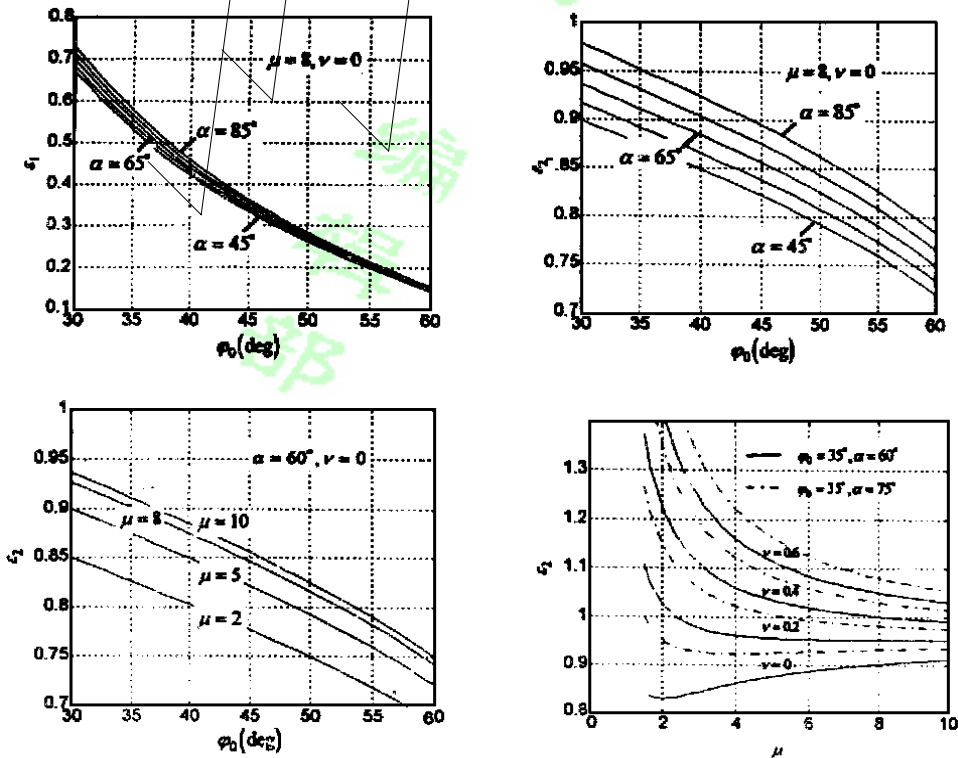


图 4 设计参数  $\mu, \alpha, v$  和  $\varphi_0$  对  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  的影响规律

图 4 示出了参数  $\mu, \alpha, v$  和  $\varphi_0$  对  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  的影响规律. 由图 4 可见:

(1) 当时  $\mu = \frac{1}{\cos\alpha}$ ,  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  取得极小值. 若  $\mu \geq \frac{1}{\cos\alpha}$ ,  $\epsilon_1$  随  $\mu$  增加单调增加; 当  $v$  较小时,  $\epsilon_2$  随  $\mu$  增加亦单调增加, 反之亦反.

(2)  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  随  $\alpha$  增加单调增加, 而随  $q_0$  增加单调减小.

(3)  $v$  对  $\epsilon_1$  无影响, 但  $\epsilon_2$  随  $v$  增加单调增加. 值得指出, 在尺度综合时, 还应考虑灵活度和姿态能力等多种因素, 以确定构型参数.

### 5 算例

利用上述方法对一 6-PSS 并联操作机进行工作空间分析, 尺度参数如表 1.

表 1 尺度参数

$\delta_0$	$q_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha$	$v$	$\mu$	$r_a$	$r_b$	$s$	$L$
30°	38°	5°	60°	55°	0.5	6	1	6	9	8.91

图 5 示出了关于给定尺度参数的工作空间和主工作空间边界. 经计算知, 主工作空间为一  $\Phi 5.56 \times 2.85$  的圆柱体. 图 6 示出了在任意截面内, 各单支链工作子空间与总体工作空间的求交关系, 及后者与主工作空间的包容关系.

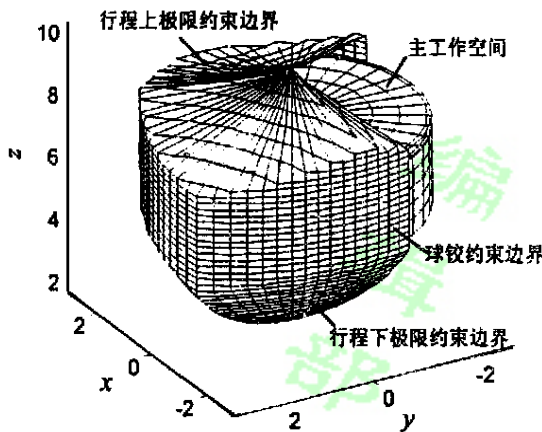


图 5 工作空间三维视图

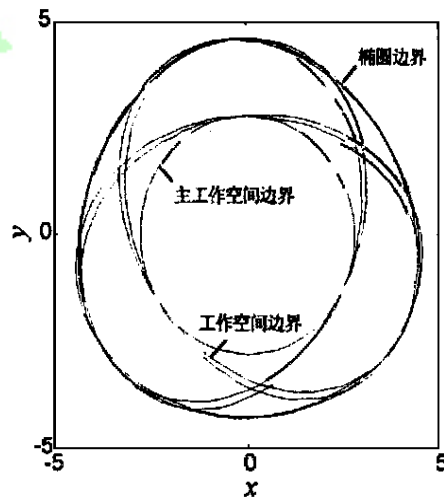


图 6 工作空间 z 截面

### 6 结论

本文研究了 6-PSS 并联机器人操作机平动工作空间边界解析方法, 得到如下结论:

(1) 平动工作空间归结为三类边界所包含的空间的交集, 即由六张球面片交集构成的上、下边界与由六张椭圆柱面交集构成的侧面边界的求交问题.

(2) 所提出主工作空间的概念不仅可用于对不规则工作空间的度量, 而且具有关于设计参数的显式解析表达. 在此基础上提出的无量纲评价指标, 可充分表征设计参数对工作空间的影响规律.

(3) 本方法还可用于求解三自由度平动 3-PSS 并联机器人操作机的工作空间.

## 参 考 文 献

- 1 Stewart D. A Platform with 6 Degrees of Freedom. Proc Inst Mech Eng, 1965, 180: 381- 386
- 2 Jo D Y. Workspace Analysis of Closed Loop Mechanisms with Unilateral Constraints. ASME Des Eng Div Pub, Adv in Des Automat, 1989, 3: 53- 60
- 3 Gosselin C. Determination of the Workspace of 6-dof Parallel Manipulators. ASME J Mech Des, 1990, 112(3): 331- 336
- 4 Merlet J P. Geometrical Determination of Workspace of a Constrained Parallel Manipulators. in ARK, France, 1992, 326- 329
- 5 Ji Z. Workspace Analysis of Stewart Platforms Via Vertex Space. J Robotic Systems, 1994, 11(7): 631- 638
- 6 黄田, 汪劲松, Whitehouse D J. Stewart 并联机器人位置空间解析. 中国科学(E 辑), 1998, 28(2): 136- 145
- 7 Huang T, Wang J S, Whitehouse D J. Closed Form Solution to Hexapod-based Virtual Axis Machine Tools. ASME J of Mechanical Design, 1999, 21(1): 26- 31
- 8 Huang T, Wang J S, Yuan J X. Determination of Closed Form Solution to Position Workspace of Stewart Platform. ASME 25th Biennial Mechanism Conf, DETC98/MECH6001, 1998
- 9 Huang T, Wang J S, Whitehouse D J. Theory and Methodology for Kinematic Design of Gough-stewart Platforms. Science in China (Series E), 1999, 42(4): 1- 12
- 10 Huang T, Whitehouse D J, Wang J S. Local Dexterity, Optimum Architecture and Design Criteria for Parallel Machine Tools. Annals of CIRP, 1997, 47(1): 347- 351
- 11 Pritschow G, Wurst H K. Systematic Design of Hexapods and Other Parallel Link Systems. Annals of CIRP, 1997, 46(1): 291- 295
- 12 Jiang B, *et al.* Dexterity Design of 6-PSS Parallel Manipulators. Proc of the 10th TMM World Congress, Oulu, Finland, 1999

## CLOSED FORM SOLUTION TO TRANSLATIONAL WORKSPACE OF 6-PSS PARALLEL MANIPULATORS

JIANG Bing HUANG Tian

(School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin, 300072)

**Abstract:** The method to formulate the closed form solution to the translational workspace boundary of 6-PSS parallel manipulators is proposed. With a understanding of the kinematic characteristics of the manipulator, the workspace boundary as a whole is formulated as the intersection of three subsets, i.e. two subsets produced by the intersection of six spherical surfaces, and one subset produced by the intersection of six elliptical cylindrical surfaces. The primary workspace is also defined and the influence of the structural parameters on such workspace is discussed.

**Keywords:** Parallel manipulators, computational kinematics, workspace, surface intersection

作者简介:

姜 兵 (1972-), 男, 博士研究生. 研究领域: 并联机器人机构学.