文章编号：1002-0446(2010)-01-0006-07

并联 2-RRR/UPRR 踝关节康复机器人机构及其运动学

边 辉，刘艳辉，梁志成，赵铁石
（燕山大学，河北 秦皇岛 066004）

摘 要：在分析现有踝关节康复机器人机构特征的基础上，提出了一种具有远程转动中心的 2-RRR/UPRR 并联踝关节康复机构．该机构可以实现踝关节康复运动所需的三自由度转动，即内翻/外翻，背屈/跖屈，外展/内收运动．采用关节轴线的运动副螺旋矢量表示法分析了该机构在整个工作空间内任意位姿都可以实现 3 维转动的机构学原理．计算了其自由度，并讨论了选取与定平台相连接的 3 个转动副作为输入的合理性．应用球面几何方法给出该机构的位置反解，同时推导出机构位置正解表达式，并给出了数值算例，验证了其工作空间满足踝关节康复运动的要求．

关键词：踝关节；康复机器人；并联机构；运动学
中图分类号：TP24 **文献标识码**：A

A Novel 2-RRR/UPRR Robot Mechanism for Ankle Rehabilitation and Its Kinematics

BIAN Hui，LIU Yanhui，LIANG Zhichen，ZHAO Tieshi
(*Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)

Abstract: Based on the analysis on the mechanisms of existing robots for ankle rehabilitation, a novel 2-RRR/UPRR parallel manipulator mechanism that can perform three rotations around the remote centre is presented. It meets the requirements of ankle rehabilitation motions for eversion/inversion, dorsiflexion/plantarflexion, adduction/abduction. The principles that the mechanism can always perform the above motions in its workspace are analyzed based on kinematic pair screw theory in the form of vector, the mobility of the mechanism is calculated, and the rationality of selecting 3 rotation pairs connecting with fixed platform as inputs is discussed. The forward and inverse kinematics of the mechanism are given based on spherical trigonometry, and some numerical examples are presented. The workspace of the parallel mechanism is big enough for ankle rehabilitation.

Keywords: ankle; robot for rehabilitation; parallel manipulator; kinematics

1 引言（Introduction）

踝关节扭伤是骨科临床常见的运动伤，其发生率在下肢损伤中居第 2 位．人足在人体站立和行走时承担着身体全部的重量，特别是奔跑、跳跃和身体负重的时候，踝关节承受了巨大的载荷和冲击，致使踝关节扭伤在日常生活中较为常见，特别是在要求不断改变方向、急起急停的球类等技术复杂运动中表现得尤为突出．据统计，92%的篮球运动员曾有过踝关节扭伤，83%曾损伤 2 次以上；专业运动员 73%曾有过 2 次以上的踝关节韧带损伤，59%残留有各种后遗症．踝关节扭伤后，如果治疗不及时或不彻底，容易导致踝关节韧带过度松弛，关节不稳，易引起反复扭伤，造成踝关节功能障碍等后遗症，严重的将影响行走功能 [1-2]．踝关节扭伤的治疗除了及时采取冷敷和药物治疗外，还需要在关节肿胀消退、疼痛减轻后，积极地进行康复训练，从而加速关节组织的愈合，增强踝关节周围韧带肌肉力量，提高踝关节的柔韧性、稳定性及协调性．但行走等简单康复运动很容易发生二次扭伤，造成踝关节的习惯性损伤．按摩是促进踝关节康复的重要手段，但医师与患者间“一对一”的治疗过程十分繁重．随着机电一体化技术的发展，踝关节康复机器人已成为现代康复工程研究的热点．它不仅可以减轻医生的劳动强度，而且可以定量评估患者康复状况，并通过有规律的、适度的康复运动，使踝关节快速彻底康复．

目前，国内外正在试验研究或已投放市场的踝关节康复治疗机器人产品形式多样，各具特色，都

基金项目：国家自然科学基金资助项目（50675191）；教育部博士点基金资助项目（20060216008）．
通讯作者：边辉，ysubh@163.com 收稿/录用/修回：2009-03-13/2009-05-27/2009-10-21

在一定程度上取得了较好的康复效果 [3-6]. 但是，由于踝关节康复需要实现空间多自由度运动，所以创新设计出能完全满足踝关节康复运动需要且结构简单、使用方便的机构构型，仍是踝关节康复机器人研发的重点. 本文在分析现有踝关节康复机器人机构特征的基础上，提出一种适用于踝关节康复运动的具有固定远程转动中心的 2-RRR/UPRR 机构构型 [7]，并进行了相关运动学研究.

2　踝关节康复机器人机构分析与设计（Analysis and design of the mechanisms of robot for ankle rehabilitation）

2.1　现有踝关节康复机器人机构

踝关节康复过程中，除医师对患处进行按摩外，患者还采用弹力绷带、塑料泡沫滚筒、摇摆板等器械对踝关节进行辅助治疗. 这些器械虽然结构简单，但功能单一，需要患者自身去操作且难以定量控制. 近年来，随着机电一体化技术的发展，相继研制出多种由伺服电机驱动的持续被动运动康复器 [8-9]. 较为简单的有单自由度转动踝关节康复器，如图 1(a) 所示，其结构简单，能实现 1 维转动. 图 1(b) 所示的机构方案串联 2 个转动副，实现了空间两轴转动，但串联结构第 2 级转动驱动器不能相对基座固定安装，增大了康复器运动部分的惯量. 为了克服这一缺点，提出了图 1(c) 所示的 RR/RRR 并联机构方案，实现了空间两轴转动和驱动器的固定安装. 踝关节可以实现内翻/外翻、背屈/跖屈、外展/内收的复合运动，通常被简化为具有 3 个转动自由度的球关节，因此需要具有 3 个转动自由度的康复机器人，而直接采用串联三轴联动的机器人机构方案将使其中的 2 个驱动电机无法固定安装. 为了实现踝关节 3 个自由度的康复训练，文 [10-11] 应用 3-SPS/S、3-PSS/S、4-SPS/S 等并联机构开发踝关节康复机器人，这些机构满足了踝关节进行复合康复训练对自由度的要求且其驱动电机可固定安装. 美国新泽西大学成功地研制了基于 Stewart 机构具有 6 个自由度的并联踝关节康复机器人 [12]，其运动平台可以实现 3 维转动，同时还会带动脚掌和小腿进行移动，结合虚拟现实系统可以使患者模拟进行多种情景下的康复训练. 文 [13] 提出了 4-UP(P_e)S/S 生物融合踝关节康复机器人，其机构系统由简化为球副的人体踝关节和机械本体共同构成，能够实现以踝关节为转动中心的康复训练. 该机构充分发挥了人体在康复过程中的主动性，设计更加人性化.

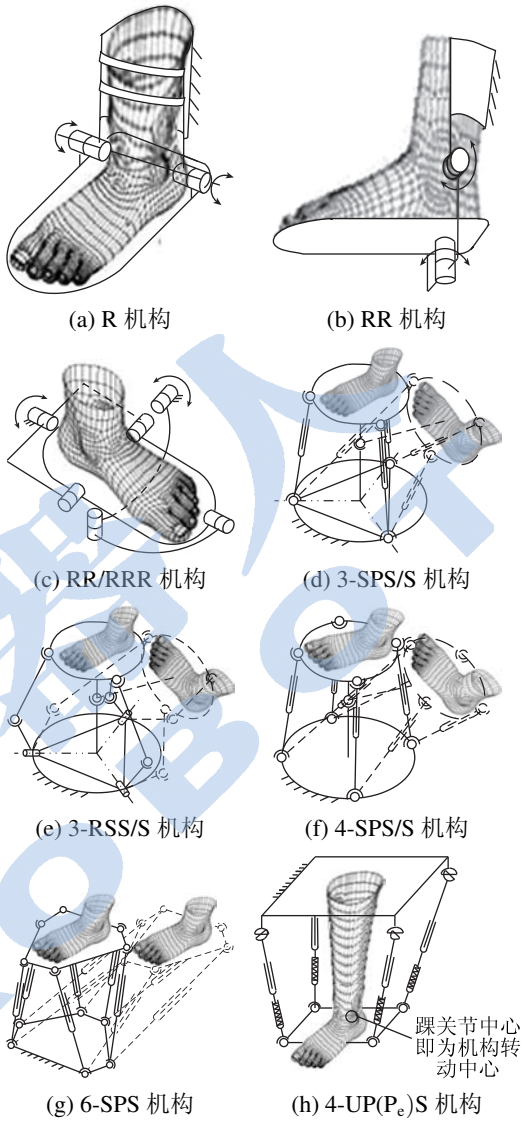
综上所述，从机构学角度可以发现，目前的踝关节康复机器人在不同程度上存在着如下问题：

(1) 机构自由度不足：机器人只能实现绕 1 个或 2 个轴的转动，不能实现绕踝关节中心点的 3 维复合转动，影响康复效果，如图 1(a) ～ (c) 所示.

(2) 机构自由度冗余：如图 1(g) 所示，机器人除可以实现 3 维转动外，还具有 3 个移动自由度，当固定着脚的运动平台移动时，若小腿不能随动或随动不及时，则会造成踝关节的二次损伤.

(3) 机构转动中心不能与踝关节中心相重合：如图 1(d) ～ (f) 所示，机器人转动中心均在其机构内部且不能与踝关节中心相重合，在康复运动过程中踝关节随机构转动的同时必伴有移动，此时小腿就得随动. 如果小腿协调得不到位，轻则达不到运动角度影响康复进度，重则导致踝关节二次损伤.

(4) 机构对踝关节存在非期望作用力：如图 1(h)



(a) R 机构　(b) RR 机构　(c) RR/RRR 机构　(d) 3-SPS/S 机构　(e) 3-RSS/S 机构　(f) 4-SPS/S 机构　(g) 6-SPS 机构　(h) 4-UP(P_e)S 机构

图 1　踝关节康复机器人机构简图

Fig.1　The sketch of robot for ankle rehabilitation

所示，基于生物融合理念设计的踝关节康复机器人，踝关节中心直接充当机构系统转动中心，利用人体关节的运动学性能来约束机械结构的移动自由度，使得踝关节承受 3 个方向的作用力，不利于患处的早期康复.

所以，如何综合只具有 3 维转动自由度且机构转动中心能够和踝关节中心始终相重合的机械机构成为开发踝关节康复机器人的关键问题.

2.2 新型 2-RRR/UPRR 康复机构

基于以上分析，本文利用少自由度并联机器人型综合的约束螺旋理论，提出一种具有远程转动中心、可实现 3 维转动的 2-RRR/UPRR 并联踝关节康复机器人机构. 如图 2 所示，该机构由定平台、运动平台和连接定平台和运动平台的 3 个运动分支组成. 其中运动平台用于固定脚掌；运动分支 1 与运动分支 2 结构相同，分别由圆弧面上的 3 个转动副串联组成；分支 3 由与定平台连接的万向铰（转动副 1、转动副 2）、移动副 3、转动副 4 和与运动平台相连的转动副 5 组成. 其中，转动副 1 和转动副 2 的轴线相垂直，转动副 2 和移动副 3 的轴线相垂直，移动副 3 和转动副 4 的轴线相垂直，转动副 4 和转动副 5 的轴线相垂直，转动副 2 和转动副 4 的轴线平行，转动副 1 和转动副 5 及运动分支 1、2 中的 6 个转动副的轴线始终汇交于机构外一点，该点即为机构的远程转动中心.

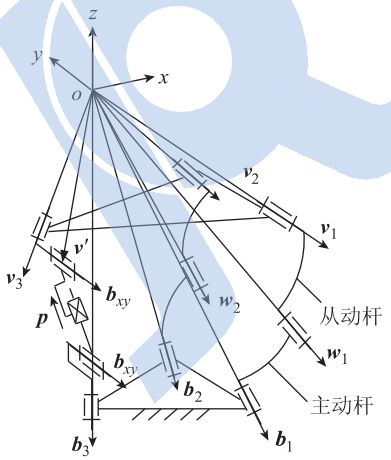


图 2 2-RRR/UPRR 并联机构简图

Fig.2 The sketch of 2-RRR/UPRR parallel mechanism

2-RRR/UPRR 机构为具有远程转动中心的特殊球面机构，与一般的转动中心在机构内部的全对称球面机构相比，该机构保证踝关节中心在康复过程中始终与机构转动中心相重合，且机构不对踝关节产生作用力，UPRR 分支使机构在进行踝关节的主康复运动（背伸/跖屈）时不出现奇异位形且输出和输入部分解耦，容易实现实时控制. 由于具有固定的远程转动中心，2-RRR/UPRR 机构可保证当脚掌被固定在机构运动平台后踝关节中心始终与机构转动中心相重合且空间位置保持不变，踝关节位置不变，则小腿可以被固定. 这样，就可在脚掌和小腿间施加可控的牵引力来提高踝关节的康复效果，这是那些机构转动中心与踝关节中心不能重合的踝关节康复机构所难以实现的.

3 2-RRR/UPRR 并联机构自由度及其输入合理性（Mobility of 2-RRR/UPRR parallel mechanism and its input rationality）

在第 1、2 运动分支中，令 $\boldsymbol{b}_i$、$\boldsymbol{w}_i$ 和 $\boldsymbol{v}_i$（$i=1,2$）表示分支中 3 个转动副轴线的方向矢量，建立如图 2 所示固连于定平台上的坐标系 o-xyz，其原点为机构的远程转动中心 o，z 轴垂直于定平台，方向垂直向上；x 轴在 $\boldsymbol{b}_1$ 和 z 轴所成平面与 $\boldsymbol{b}_2$ 和 z 轴所成平面的二面角的角平分面内. 机构第 1、2 分支的运动副轴线可以用关节轴线的运动副螺旋矢量表示法 [14] 给出

$$\boldsymbol{S}_{i1}=(\boldsymbol{b}_i;\boldsymbol{0}),\quad \boldsymbol{S}_{i2}=(\boldsymbol{w}_i;\boldsymbol{0}),\quad \boldsymbol{S}_{i3}=(\boldsymbol{v}_i;\boldsymbol{0})\quad i=1,2 \tag{1}$$

由于每个运动分支的 3 个运动副轴线空间异面且交于一点，则 $\boldsymbol{S}_{i1}$、$\boldsymbol{S}_{i2}$、$\boldsymbol{S}_{i3}$ 是线性无关的. 分支 i 的约束反螺旋可以直接表示为沿 x 轴，沿 y 轴和沿 z 轴的约束力矢：

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{r}}_{i1}=(\boldsymbol{x};\boldsymbol{0}),\quad \boldsymbol{S}^{\mathrm{r}}_{i2}=(\boldsymbol{y};\boldsymbol{0}),\quad \boldsymbol{S}^{\mathrm{r}}_{i3}=(\boldsymbol{z};\boldsymbol{0}) \tag{2}$$

在 UPRR 分支中，转动副 1 和转动副 5 的轴线相交于坐标系原点，则运动螺旋为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{S}_{31}=(\boldsymbol{b}_3;\boldsymbol{0}),\ \boldsymbol{S}_{32}=(\boldsymbol{b}_{xy};\boldsymbol{b}_3\times\boldsymbol{b}_{xy})\\&\boldsymbol{S}_{33}=(\boldsymbol{0};\boldsymbol{p}),\ \boldsymbol{S}_{34}=(\boldsymbol{b}_{xy};\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{b}_{xy}),\ \boldsymbol{S}_{35}=(\boldsymbol{v}_3;\boldsymbol{0})\end{aligned} \tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{b}_3$、$\boldsymbol{v}_3$ 分别为相交于坐标系原点的转动副 1 和转动副 5 轴线的方向矢量，$\boldsymbol{b}_{xy}$ 为平行于 xoy 平面的方向矢量，表示转动副 2 和转动副 4 轴线的方向，$\boldsymbol{p}$ 为表示移动副中心线的方向矢量，$\boldsymbol{v}'$ 为转动副 4 轴线的位置矢量. 由于转动副 2、4 的轴线与移动副 3 的中心线相垂直，所以矢量 $\boldsymbol{b}_{xy}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 相互垂直，且任何含有相同矢量的混合积运算结果为 0，易判断出第 3 分支约束反螺旋为

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{r}}_{31}=(\boldsymbol{b}_{xy};\boldsymbol{0}) \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{r}}_{31}$ 表示 xoy 平面内沿转动副 2 轴线 $\boldsymbol{b}_{xy}$ 方向且过坐标原点的约束力矢. 3 个分支对运动平台的 7 个约束反螺旋是线性相关的，其最大线性无关螺旋组为

$$\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{r}}=(\boldsymbol{x};\boldsymbol{0}),\quad \boldsymbol{S}_2^{\mathrm{r}}=(\boldsymbol{y};\boldsymbol{0}),\quad \boldsymbol{S}_3^{\mathrm{r}}=(\boldsymbol{z};\boldsymbol{0}) \tag{5}$$

式中 $\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{r}}$、$\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{r}}$、$\boldsymbol{S}_3^{\mathrm{r}}$ 分别表示为沿 x 轴、沿 y 轴和沿 z 轴的约束力矢，所以机构的冗余约束数为 4.

采用 Grübler-Kutzbach 公式来计算机构的自由度：

$$M=d(n-g-1)+\sum_{i=1}^{g}f_i+v$$

2-RRR/UPRR 机构的公共约束为 $\lambda=0$，则机构的阶数 $d=6-\lambda=6$，构件数 $n=10$，运动副的数目 $g=11$，所有运动副的自由度的代数和为 $\sum_{i=1}^{g}f_i=11$，冗余约束为 $v=4$. 所以机构的自由度为

$$M=6(10-11-1)+11+4=3$$

由式 (5) 可知机构的 3 个分支共同约束了运动平台的 3 个移动自由度，使其具有绕远程转动中心的 3 维转动自由度，能够提供踝关节康复训练所需的复合转动.

空间并联机构通常每个分支上有一个输入，那么在各个分支上选取的一组输入是否能够使上平台产生确定的输出就是并联机构输入合理性的判别问题. 2-RRR/UPRR 并联机构是一个具有过约束的空间多闭环机构. 对于这类机构，很难直观判别三分支任选一组输入是否产生新的约束，本文应用文 [15] 给出的基于螺旋系线性相关性的空间并联机构输入选取合理性判别方法来判别 2-RRR/UPRR 机构的输入合理性. 设各分支中与定平台相连的转动副为机构输入，即把这 3 个转动副刚化，第 1、2 分支中将与定平台相连的转动副刚化后，会各增加一个约束反螺旋，则其分支约束反螺旋可表示为 $\boldsymbol{S}_{i1}^{\mathrm{r}}=(\boldsymbol{x};\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{S}_{i2}^{\mathrm{r}}=(\boldsymbol{y};\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{S}_{i3}^{\mathrm{r}}=(\boldsymbol{z};\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{S}_{i4}^{\mathrm{r}}=(\boldsymbol{0};\boldsymbol{w}_i\times\boldsymbol{v}_i)$，$i=1,2$. 同理，第 3 分支约束反螺旋会变为 $\boldsymbol{S}_{31}^{\mathrm{r}}=(\boldsymbol{b}_{xy};\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{S}_{32}^{\mathrm{r}}=(\boldsymbol{0};\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{b}_{xy})$. 可见，将 3 个与定平台相连的转动副设为机构输入后，各分支均对上平台增加一个约束力矩螺旋，分别为 $\boldsymbol{S}_{14}^{\mathrm{r}}$、$\boldsymbol{S}_{24}^{\mathrm{r}}$ 和 $\boldsymbol{S}_{32}^{\mathrm{r}}$，这 3 个力矩螺旋线性无关，共同约束了上平台的 3 个转动自由度，此时机构上平台失去所有自由度，因此这组输入的选取是合理的.

4　2-RRR/UPRR 并联机构的位置解（Kinematics of 2-RRR/UPRR parallel mechanism）

4.1　位置反解

已知机构运动平台绕固定坐标系的 3 个转角 α、β、γ，解出机构 3 个分支中与定平台相连的转动副的输入角 θ_1、θ_2、θ_3，就是该机构的运动学位置反解. 设定平台与运动平台平行时的位置为机构的初始位置. 由于机构的第 1、2 分支机构相同，所以令：α_1 表示主动杆的结构角，即 $\boldsymbol{b}_i$ 和 $\boldsymbol{w}_i$ 之间的夹角；α_2 表示随动杆的结构角，即 $\boldsymbol{w}_i$ 和 $\boldsymbol{v}_i$ 之间的夹角；β_i 表示 $\boldsymbol{b}_i$ 和 z 轴的负方向之间的夹角；β_i' 表示初始位置时 $\boldsymbol{v}_i$ 和 z 轴的负方向之间的夹角；ε_i 表示面 yoz 与面 b_ioz 的夹角；ε_i' 表示面 yoz 与面 v_ioz 的夹角；t_{ij} 表示 $\boldsymbol{v}_i$ 与 $\boldsymbol{v}_j$ 之间的夹角 $(ij=12,23,31)$；η_1 表示面 v_1ov_2 与面 v_1ov_3 之间的夹角.

当机构处于初始位置时，将与运动平台相连的各转动副轴线的方向矢量记为 $\boldsymbol{v}_{i0}=(\sin\varepsilon_i'\sin\beta_i'\ -\cos\varepsilon_i'\sin\beta_i'\ -\cos\beta_i')^{\mathrm{T}}$（$i=1,2,3$），当运动平台转动后 $\boldsymbol{v}_i$ 的方向矢量为

$$\boldsymbol{v}_i=(v_{ix}\ \ v_{iy}\ \ v_{iz})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}_{i0},\quad i=1,2,3 \tag{6}$$

其中，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{z},\gamma)\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y},\beta)\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\alpha)$. 所以 v_{ix}、v_{iy}、v_{iz} 是机构结构参数和输出角 α、β、γ 的函数.

利用球面三角公式 [16]，分别求得第 1、2 分支中间转动副的方向余弦矢量为

$$\boldsymbol{w}_i=(w_{ix}\ \ w_{iy}\ \ w_{iz})^{\mathrm{T}},\quad i=1,2 \tag{7}$$

其中：

$$\begin{aligned}w_{ix}=&\sin\alpha_1\sin\theta_i\cos\varepsilon_i+\sin\beta_i\cos\alpha_1\sin\varepsilon_i-\\&\cos\beta_i\sin\alpha_1\cos\theta_i\sin\varepsilon_i\\w_{iy}=&\sin\alpha_1\sin\theta_i\sin\varepsilon_i-\sin\beta_i\cos\alpha_1\cos\varepsilon_i+\\&\cos\beta_i\sin\alpha_1\cos\theta_i\cos\varepsilon_i\\w_{iz}=&-\cos\beta_i\cos\alpha_1-\sin\beta_i\sin\alpha_1\cos\theta_i\end{aligned}$$

第 1、2 分支中与运动平台相连转动副和中间转动副是通过随动杆连接，其轴线 $\boldsymbol{w}_i$ 与 $\boldsymbol{v}_i$ 成固定夹角 α_2，可构造约束方程

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{w}_1=\cos\alpha_2\\\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{w}_2=\cos\alpha_2\end{cases} \tag{8}$$

式 (8) 为含有机构结构参数、输出角 α,β,γ 和输入角 θ_1,θ_2 的方程式. 当 α,β,γ 给定时，通过求解可获得第 1、2 分支的输入角 θ_1,θ_2.

对于 UPRR 分支，指向转动中心的转动副 1 和转动副 5 的轴线始终位于同一平面且垂直于 xoy 平面，则 $\boldsymbol{v}_3$ 在 xoy 平面内的投影矢量转过的角度为输入角 θ_3，已知 $\boldsymbol{v}_{30}$ 和 $\boldsymbol{v}_3$，则它们在 xoy 平面内投影的单位矢量分别为 $\boldsymbol{v}_{30}^{xy}=(\sin\varepsilon_3'\ \ -\cos\varepsilon_3'\ \ 0)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{v}_3=(\dfrac{v_{3x}}{\sqrt{v_{3x}^2+v_{3y}^2}}\ \ \dfrac{v_{3y}}{\sqrt{v_{3x}^2+v_{3y}^2}}\ \ 0)^{\mathrm{T}}$，则有

$$\tan\theta_3=\frac{\sin\theta_3}{\cos\theta_3}=\frac{|\boldsymbol{v}_{30}^{xy}|\cdot|\boldsymbol{v}_3^{xy}|\cdot\sin\theta_3}{|\boldsymbol{v}_{30}^{xy}|\cdot|\boldsymbol{v}_3^{xy}|\cdot\cos\theta_3}$$
$$=\frac{|\boldsymbol{v}_{30}^{xy}\times\boldsymbol{v}_3^{xy}|}{\boldsymbol{v}_{30}^{xy}\cdot\boldsymbol{v}_3^{xy}}=\frac{v_{3y}\sin\varepsilon_3'+v_{3x}\cos\varepsilon_3'}{v_{3x}\sin\varepsilon_3'-v_{3y}\cos\varepsilon_3'}\qquad(9)$$

由机构特征可知 $\varepsilon_3'=270°$，将其代入式 (9) 得 $\tan\theta_3=\dfrac{v_{3y}}{v_{3x}}$，可得出输入角 θ_3．反解毕．

4.2 位置正解

当给出 3 个驱动器的 3 个输入 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 时，计算运动平台的位姿，即为该机构运动学的位置正解．在图 3 所示运动链中，φ_1 表示平面 b_1ow_1 与平面 w_1ov_1 之间的夹角，φ_2 表示平面 w_1ov_1 与平面 v_1ov_2 之间的夹角．根据运动链的几何约束关系，利用球面多边形环路方程的符号法，由球面四边形 4321、球面五边形 54321 和球面五边形 5′4321 可以分别求得矢量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ 的方向余弦，$\boldsymbol{v}_i$ 除了与机构的已知参数 α_1、α_2、β_1、ε_1、η_1、t_{12}、t_{23}、t_{31} 有关，还与输入参数 θ_1 和面角 φ_1、φ_2 有关，则需要将面角 φ_1、φ_2 消去，获得只含有机构参数和输入角度的 $\boldsymbol{v}_i$ 表达式．

利用约束方程 (8)、(9) 可建立关于 φ_1 的方程

$$L_i\sin\varphi_1+M_i\cos\varphi_1+N_i=0,\quad i=1,2\qquad(10)$$

其中 L_i、M_i 和 N_i 为含有结构参数、输入 θ_1 和面角 φ_2 的多项式，由方程组 (10) 可以求得 $\sin\varphi_1$、$\cos\varphi_1$：

$$\left.\begin{aligned}\sin\varphi_1&=\frac{N_2M_1-N_1M_2}{L_1M_2-L_2M_1}\\ \cos\varphi_1&=-\frac{N_2L_1-N_1L_2}{L_1M_2-L_2M_1}\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

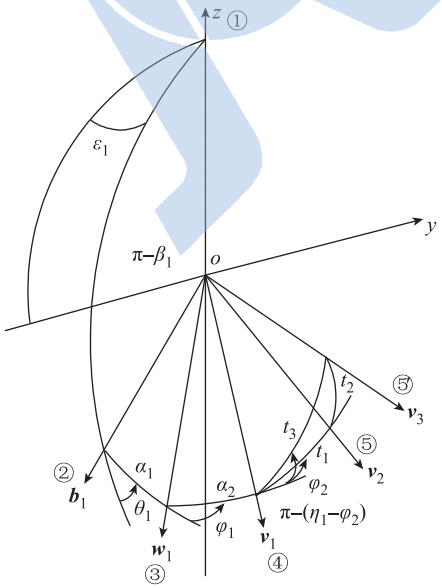


图 3 球面运动链

Fig.3 The spherical chain

利用 $\sin^2\varphi_1+\cos^2\varphi_1=1$，方程组 (11) 可整理为

$$L_1^2N_2^2+L_2^2N_1^2+M_1^2N_2^2+M_2^2N_1^2-L_1^2M_2^2-L_2^2M_1^2-$$
$$2L_1N_1L_2N_2-2M_1N_1M_2N_2+2L_1M_1L_2M_2=0\qquad(12)$$

式 (12) 为关于 φ_2 的方程，令 $x=\tan\dfrac{\varphi_2}{2}$，有 $\sin\varphi_2=\dfrac{2x}{1+x^2}$，$\cos\varphi_2=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，代入式 (12) 可以得到一个 x 的 8 次多项式，则面角 φ_2 有 8 个解，排除其中的复数解，考虑构件之间的干涉情况和机构运动的连续性，可确定唯一的 φ_2．将 φ_2 代入式 (11) 可求得 φ_1，从而可以得出只含有机构参数和输入角度的 $\boldsymbol{v}_i$ 的表达式．又由式 (6) 得运动平台转动矩阵

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}r_{11}&r_{12}&r_{13}\\r_{21}&r_{22}&r_{23}\\r_{31}&r_{32}&r_{33}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}v_{1x}&v_{2x}&v_{3x}\\v_{1y}&v_{2y}&v_{3y}\\v_{1z}&v_{2z}&v_{3z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{10x}&v_{20x}&v_{30x}\\v_{10y}&v_{20y}&v_{30y}\\v_{10z}&v_{20z}&v_{30z}\end{pmatrix}^{-1}$$

利用相等矩阵中对应元素相等，可求得运动平台绕固定坐标系的 3 个轴的转角 α、β 和 γ 分别为

$$\alpha=\arctan\frac{r_{32}}{r_{33}},\quad\beta=\arcsin(-r_{31}),\quad\gamma=\arctan\frac{r_{21}}{r_{11}}$$

4.3 主康复运动解耦分析

当应用 2-RRR/UPRR 机构进行踝关节背屈/跖屈康复运动时，机构运动平台只绕 y 轴运动，此时只有 β 变化而 $\alpha=\gamma=0$，将 $\alpha=\gamma=0$ 代入式 (7) 可得化简后的 $\boldsymbol{v}_i$ 方向余弦表达式 $\boldsymbol{v}_i=(v_{ix}\ \ v_{iy}\ \ v_{iz})^{\mathrm{T}}$，其中：

$$\left.\begin{aligned}v_{ix}&=\sin\varepsilon_i'\sin\beta_i'\\ v_{iy}&=-\cos\varepsilon_i'\sin\beta_i'\\ v_{iz}&=-\sin\varepsilon_i'\sin\beta_i'\sin\beta-\cos\beta_i'\cos\beta\end{aligned}\right.\qquad(13)$$

将 (13) 代入式 (10) 可得出分支 3 的输入角度 $\theta_3\equiv0$，输出变量 β 为输入变量 θ_1、θ_2 的函数，与 θ_3 无关，有 $\beta=f(\theta_1,\theta_2)$，也就是说在进行背屈/跖屈康复运动时 2-RRR/UPRR 机构的输出与输入为部分解耦．

4.4 数值算例

设 2-RRR/UPRR 并联机构的结构参数分别为：$\alpha_1=36°$，$\alpha_2=36°$，$\beta_1=\beta_2=20°$，$\beta_3=0°$，$\beta_1'=\beta_2'=50°$，$\beta_3'=15°$，$\varepsilon_1=30°$，$\varepsilon_2=150°$，$\varepsilon_3=270°$，$\varepsilon_1'=60°$，$\varepsilon_2'=120°$，$\varepsilon_3'=270°$，采用上述机构正反解方法，借助 Matlab 软件，计算了输入 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 和输出 α,β,γ 的部分数据，机构的运动学位置反解见表 1，运动学位置正解见表 2．

表 1　2-RRR/UPRR 位置反解

Tab.1　The inverse position kinematics solution of 2-RRR/UPRR parallel mechanism (°)

α	β	γ	θ_1	θ_2	θ_3
10	0	0	−11.7365	−7.5266	−32.9458
20	0	0	−26.1670	−10.6642	−51.9237
0	10	0	8.9430	−8.9430	0
0	25	0	31.7013	−31.7013	0
0	−40	0	−48.6038	48.6038	0
0	0	10	−14.7342	−15.3264	10.0000
0	0	20	−28.8382	−31.0112	20.0000

表 2　2-RRR/UPRR 位置正解

Tab.2　The forward position kinematics solution of 2-RRR/UPRR parallel mechanism (°)

θ_1	θ_2	θ_3	α	β	γ
−11.7365	−7.5266	−32.9458	10	0.0001	0
−26.1670	−10.6642	−51.9237	20.0003	0.0004	0.0003
8.9430	−8.9430	0	0	10.0001	0
31.7013	−31.7013	0	0	25	0
−48.6038	48.6038	0	0	−40	0
−14.7342	−15.3264	10	0	0	10
−28.8382	−31.0112	20	0	0	20

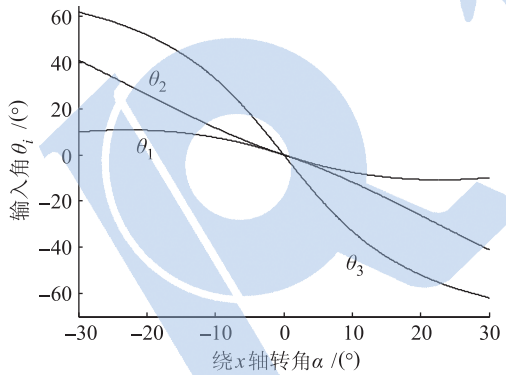


图 4　$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 随 α 的变化曲线

Fig.4　The relation curve between $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ and α

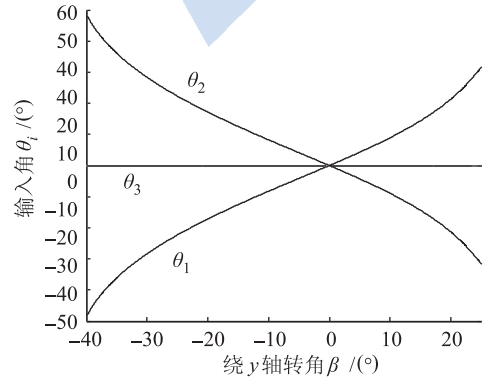


图 5　$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 随 β 的变化曲线

Fig.5　The relation curve between $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ and β

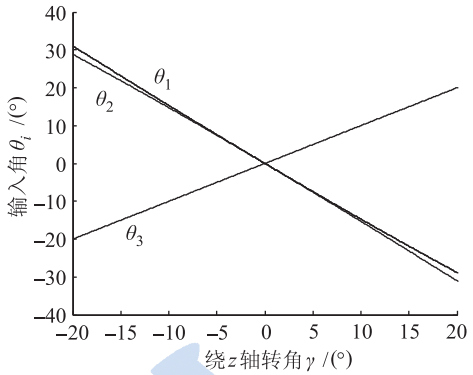


图 6　$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 随 γ 的变化曲线

Fig.6　The relation curve between $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ and γ

应用该机构进行踝关节内翻/外翻、背屈/跖屈、外展/内收运动时，3 个输入轴的角度变化情况分别如图 4 ～ 6 所示，由图 5 可以直观判断在进行背屈/跖屈康复运动时机构具有输出与输入部分解耦的特性，且有 $\theta_1 = -\theta_2$.

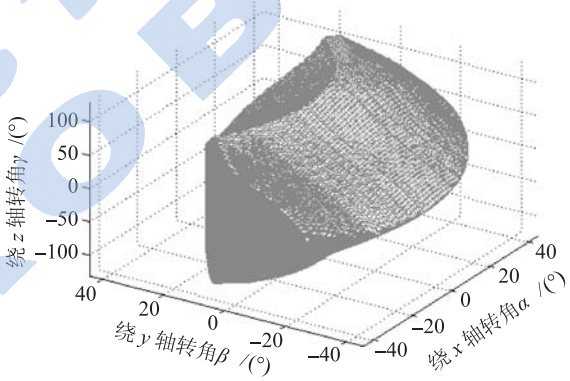


图 7　三维工作空间

Fig.7　3D workspace



图 8　样机模型

Fig.8　Prototype model

4.5 工作空间

对于 2-RRR/UPRR 机构，由于不存在移动自由度，可以说它的工作空间就是灵活工作空间，按照数值算例中给定的机构参数，利用 Matlab 软件编程，在机构杆件不相互干涉的条件下，在第 3 分支中移动副的工作长度约束范围内，利用搜索法绘制出机构的工作空间 3 维立体图，如图 7 所示. 机构可以达到的工作空间完全满足踝关节康复所需要背伸 25°/跖屈 40°（绕 x 轴旋转），外翻 20°/内翻 30°（绕 y 轴旋转），外展 10°/内收 20°（绕 z 轴旋转）的运动范围. 构造原理样机如图 8 所示.

5 结论（Conclusion）

现有的踝关节康复器不同程度地存在机构自由度不足、机构自由度冗余、机构转动中心不能与踝关节中心相重合、机构对踝关节存在非期望作用力等问题，本文提出一种具有远程运动中心、可实现 3 维转动的 2-RRR/UPRR 机构. 该机构可以用来对受伤踝关节进行单独的内翻/外翻、背屈/跖屈、外展/内收运动训练和多轴复合运动训练. 验证了选取与定平台相连接的 3 个转动副作为输入的合理性，给出机构运动学位置正反解的显式表达式. 该机构解析解简单，在进行背屈/跖屈康复运动时其输出和输入部分耦合，易于实现实时控制，且机构工作空间大于踝关节的运动范围，适用于开发新型踝关节康复治疗机器人. 该机构构型在需要远程转动中心的其它领域也具有良好的应用前景，如微创手术机器人.

参考文献（References）

[1] 姚太顺，孟宪杰. 踝关节外科 [M]. 北京：中国中医药出版社，1998.

Yao Taishun, Meng Xianjie. Ankle surgery[M]. Beijing: China Press of Traditional Chinese Medicine, 1998.

[2] 王强，孙建华，郭荣光，等. 踝关节损伤临床诊断分型 [J]. 中国矫形外科杂志，2000，7(6)：609.

Wang Qiang, Sun Jianhua, Guo Rongguang, et al. Clinical diagnosis typing of ankle injury[J]. The Orthopedic Journal of China, 2000, 7(6): 609.

[3] Agrawal A, Banala S K, Agrawal S K, et al. Design of a two degree-of-freedom ankle-foot orthosis for robotic rehabilitation[C]//IEEE International Conference on Rehabilitation Robotics. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2005: 41-44.

[4] Yoon J, Ryu J, Lim K B. Reconfigurable ankle rehabilitation robot for various exercises[J]. Journal of Robotic Systems, 2006, 22(s): 15-33.

[5] Lin C-C K, Ju M-S, Chen S-M. A specialized robot for ankle rehabilitation and evaluation[J]. Journal of Medical and Biological Engineering, 2008, 28(2): 79-86.

[6] 丰健民，李成永. 踝关节扭伤的治疗 [J]. 第二军医大学学报，1997，18(2)：184-185.

Feng Jianmin, Li Chengyong. The treatment of ankle sprain[J]. Acdemic Journal of Second Military Medical University, 1997, 18(2): 184-185.

[7] 宗光华，裴旭，于靖军，等. 双平行四杆型远程运动中心机构的设计 [J]. 机械工程学报，2007，43(12)：103-108.

Zong Guanghua, Pei Xu, Yu Jingjun, et al. Design of double parallelogram remote-center-of-motion mechanisms[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(12): 103-108.

[8] Salter R B, Harris D J. The healing of intra-articular fractures with continuous passive motion[J]. Instructional Course Lectures, 1979, 28: 102-117.

[9] Salter R B. The biologic concept of continuous passive motion of synovial joints[J]. Clinical Orthopaedics and Related Research, 1989, 242: 12-25.

[10] 刘更谦，高金莲，杨四新，等. 踝关节康复训练并联机构构型及其运动学分析 [J]. 机电产品开发与创新，2005，18(5)：13-15.

Liu Gengqian, Gao Jinliang, Yang Sixin, et al. The configuration of the ankle rehabilitation exercises parallel mechanism and its kinematics analysis[J]. Development & Innovation of Machinery & Electrical Products, 2005, 18(5): 13-15..

[11] 赵铁石，于海波，戴建生. 一种基于 3-RSS/S 并联机构的踝关节康复机器人 [J]. 燕山大学学报，2005，29(6)：471-475.

Zhao Tieshi, Yu Haibo, Dai Jiansheng. An ankle rehabilitation device based on 3-RSS/S parallel mechanism[J]. Journal of Yanshan University, 2005, 29(6): 471-475.

[12] Girone M, Burdea G M, Bouzit V, et al. A Stewart platform-based system for ankle telerehabilitation[J]. Autonomous Robots, 2001, l0(2): 203-212.

[13] 李丹. 踝关节融合康复机器人系统的轨迹规划和运动控制 [D]. 秦皇岛：燕山大学，2008.

Li Dan. Trajectory planning and control of “BSMS” ankle rehabilitation robot[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2008.

[14] Zhao T S, Dai J S, Huang Z. Geometric analysis of overconstrained parallel manipulators with three and four degrees of freedom[J]. JSME International Journal, Series C: Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing, 2002, 45(3): 730-740.

[15] 赵铁石，黄真. 欠秩空间并联机器人输入选取的理论与应用 [J]. 机械工程学报，2000，36(10)：81-85.

Zhao Tieshi, Huang Zhen. Theory and application of selecting actuating components of spatial parallel mechanisms[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2000, 36(10): 81-85.

[16] 黄真. 空间机构学 [M]. 北京：机械工业出版社，1991：5.

Huang Zhen. Spatial mechanism[M]. Beijing: China Machine Press, 1991: 5.

作者简介：

边 辉（1982–），男，博士生. 研究领域：并联机器人，康复机器人.

刘艳辉（1984–），女，硕士生. 研究领域：并联机器人，康复机器人.

梁志成（1968–），男，副主任医师. 研究领域：中医推拿，针灸.