

# 六自由度并联式机器人拉格朗日动力方程

王洪波 黄 真

(燕山大学机械二系, 秦皇岛)

**摘要** 本文对六自由度并联机器人的动力学问题进行了研究, 文中根据一二阶影响系数矩阵, 导出了仅依赖于系统的质量分布和几何特性的广义惯性张量和广义惯性功率模型矩阵, 建立了多回路系统的拉格朗日动力方程和运动控制方程, 最后给出了实例计算。

**关键词:** 并联多环机器人操作器, 动力方程, 影响系数, 惯性张量。

## 1 引言

并联机器人是一种新颖的、具有广阔前景的机器人。与串联机器人相比, 它具有刚度大、承载能力高、能得到精确的位置, 在工作范围内一般不存在反解的多值性、控制容易、驱动器可以全部配置在机架上等优点。在某些方面能代替串联式机器人, 取得特殊的效果。而且其理论有更广泛的意义。多足多关节步行机的模型即是多环多自由度机构。近年来, 并联机器人已引起国内

外学者的兴趣和重视, 发表了不少文章对其进行研究, 然而, 大多数只限于结构学和运动学方面的研究, 对动力学方面的研究是在文献[1]解决了加速度求解这一关键问题之后才开始的。文献[2]利用欧拉方程建立了动力学模型。文献[3,4]对其动态静力分析进行了研究。本文以广义惯性张量和广义惯性功率模型矩阵的概念, 利用一二阶影响系数矩阵, 将整个系统的动能以紧凑的二次型矩阵表示, 方便地建立起系统的拉格朗日动力学方程式, 较用文献[2]的方法又前进了一步。这种方法的优点还表现在把输入加速度与机构所受的所有外力以简单的显式表达出来, 使动力学的反算问题可以使用 Runge-kutta 法很方便地求解。

## 2 广义惯性张量和动能

图 1 是一个六自由度并联机器人机构简图, 这里中心平台有六个自由度, 分支数为六, 每个分支有五个构件六个基本副(转动副或移动副)。

由于机构在运动过程中, 平台的动能为

$$(KE)_p = \frac{1}{2} (m_p) \bar{V}_{pc}^T + \bar{\omega}_p^T [I_{cp}^0] \bar{\omega}_p \quad (1)$$

这里  $m_p$  和  $[I_{cp}^0]$  分别是平台的质量和惯性张量,  $\bar{V}_{pc}$  和  $\bar{\omega}_p$  分别是平台的质心速度和角速度。由文献[1]可知

$$\bar{\omega}_p = [G_q^{p\omega}] \bar{q} \quad (2)$$

$$\bar{V}_{pc} = [G_q^{pc}] \bar{q} \quad (3)$$

其中  $[G_q^{p\omega}]$  和  $[G_q^{pc}]$  分别为平台 P 及其上某点 C 相对于六个独立坐标  $\bar{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_6\}$  的转动及移动一阶影响系数矩阵, 其表达式为

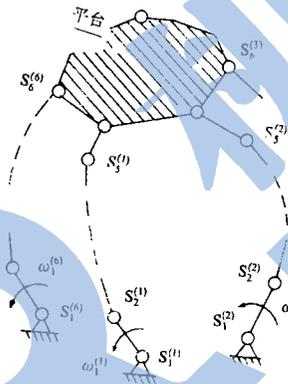


图 1 六自由度并联机器人机构简图

$$[G_q^{p\omega}] = \left[ \frac{\partial \bar{\omega}_p}{\partial \dot{q}_1} \quad \frac{\partial \bar{\omega}_p}{\partial \dot{q}_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \bar{\omega}_p}{\partial \dot{q}_6} \right] \quad (4)$$

$$[G_q^{pc}] = \left[ \frac{\partial \bar{V}_{pc}}{\partial \dot{q}_1} \quad \frac{\partial \bar{V}_{pc}}{\partial \dot{q}_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \bar{V}_{pc}}{\partial \dot{q}_6} \right] \quad (5)$$

这样(1)式可写成

$$(KE)_p = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T [m_p [G_q^{pc}]^T [G_q^{pc}] + [G_q^{p\omega}]^T [I_{pc}^0] [G_q^{p\omega}]] \dot{\bar{q}} \quad (6)$$

对于任意构件  $k$ , 有类似的公式

$$(KE)_k = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T [m_k [G_q^{kc}]^T [G_q^{kc}] + [G_q^{k\omega}]^T [I_{ck}^0] [G_q^{k\omega}]] \dot{\bar{q}} \quad (7)$$

这里  $[G_q^{k\omega}]$  和  $[G_q^{kc}]$  分别为构件  $k$  及其上某点  $C$  相对于  $\bar{g}$  的转动和移动一阶影响系数矩阵, 机构的总动能即为所有构件的动能之和

$$KE = \sum_{p=1}^6 \sum_{k=1}^5 (KE)_k^{(p)} + (KE)_p \quad (8)$$

将上式中的两项合并在一起, 并统一用  $[G_q^{u\omega}]$  表示  $[G_q^{k\omega}]$  和  $[G_q^{p\omega}]$ , 用  $[G_q^{uc}]$  表示  $[G_q^{kc}]$  和  $[G_q^{pc}]$ , 则有

$$KE = \frac{1}{2} \sum_{u=1}^N \dot{\bar{q}}^T [m_u [G_q^{uc}]^T [G_q^{uc}] + [G_q^{u\omega}]^T [I_{cu}^0] [G_q^{u\omega}]] \dot{\bar{q}} \quad (9)$$

这里  $u$  是具有质量的可动构件, 其总数  $N < 31$ . 引入广义惯性张量, 则上式动能可直接以紧凑的二次型矩阵表示

$$KE = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T [I^*] \dot{\bar{q}} \quad (10)$$

式中  $[I^*]$  被定义为广义惯性张量, 其表达式为

$$[I^*] = \sum_{u=1}^N [G_q^{uc}]^T [I_{cu}^0] [G_q^{uc}] \quad (11)$$

这里  $[G_q^{uc}]$  为  $[G_q^{u\omega}]$  和  $[G_q^{uc}]$  的组合<sup>(1)</sup>,  $[I_{cu}^0]$  是六阶惯性张量<sup>(2)</sup>.

由(11)式可以看出, 广义惯性张量依赖于构件的质量分布和相应的一阶影响系数矩阵, 而影响系数矩阵是由机构的位置决定的, 所以它仅与质量分布和机构位置有关. 另外, 由于对每个构件的  $[I_{cu}^0]$  是对称的, 故  $[I^*]$  也是对称矩阵.

### 3 拉格朗日动力方程的建立

由分析力学知, 系统的惯性力对应独立坐标  $q_n (n=1, 2, \dots, 6)$  的广义力为

$$T_{q_n}^i = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial KE}{\partial \dot{q}_n} \right) + \frac{\partial KE}{\partial q_n} \quad (12)$$

经过一系列推导可得

$$T_{q_n}^i = -\ddot{\bar{q}}^T [I^*]_{:,n} - \dot{\bar{q}}^T \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_n} ([I^*]_{:,n}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_n} ([I^*]) \right] \dot{\bar{q}} \quad (13)$$

上式可写成下列简单的形式

$$T_{q_n}^i = -\ddot{\bar{q}}^T [I^*]_{:,n} - \dot{\bar{q}}^T [P_n] \dot{\bar{q}} \quad (14)$$

式中  $[I^*]_{:,n}$  表示广义惯性张量矩阵的第  $n$  列.  $[P_n]$  被定义为广义惯性功率矩阵 (inertia power matrix)<sup>(5)</sup>, 其第  $l$  行第  $m$  列元素为

$$[P_n]_{l,m} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} ([I^*]_{l,n}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_n} ([I^*]_{l,m}) \quad (15)$$

矩阵  $[P_n]$  可用另一个满足下列关系的矩阵  $[P_n^*]$  来代替

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_n} [P_n^*] \dot{\bar{q}} = \dot{\bar{q}}^T [P_n] \dot{\bar{q}} \quad (16)$$

这样(14)式可写成

$$T_q^I = -\bar{q}^T [I^*]_{:,n} - \bar{q}^T [P_n^*] \bar{q} \quad (17)$$

式中 $[P_n^*]$ 定义为惯性功率模型矩阵(inertia power modeling matrix), 它也仅仅与机构的位置和质量分布有关, 其第 $l$ 行第 $m$ 列元素可用一二阶影响系数矩阵表示为

$$[P_n^*]_{l,m} = \sum_{s=1}^N \{ [H_{qq}^s]_{l,m}^T [I_{su}^0] [G_q^s]_{:,n} + [G_q^{su0}]_{:,l} [I_{cu}^0] [\tilde{G}_q^{su0}]_{:,n} [G_q^{su0}]_{:,m} \} \quad (18)$$

其中 $[G_q^s]_{:,l}$ 为 $[G]$ 的第 $l$ 行,  $[\tilde{G}]_{:,n}$ 为 $[G]_{:,n}$ 的反对称矩阵,  $[H_{qq}^s]_{l,m}$ 为平台 P 或任意构件 K 及其上某点 C 相对于 $\bar{q}$ 的二阶影响系数矩阵 $[H_{qq}^s]$ 的第 $l$ 行第 $m$ 列元素, 它是一个六维向量, 其表达式为

$$[H_{qq}^s]_{l,m} = \left\{ \frac{\partial^2 \omega_{ux}}{\partial \dot{q}_l \partial \dot{q}_m} \dots \frac{\partial^2 V_{ucx}}{\partial \dot{q}_l \partial \dot{q}_m} \dots \right\}^T \quad (19)$$

对于六个独立坐标 $\bar{q}$ , 则(17)式可写为

$$\bar{T}_q^I = -\bar{q}^T [I^*] - \bar{q}^T [P_n^*] \bar{q} \quad (20)$$

设 $\bar{T}_q^A$ 是作用在六个主动件上的驱动力,  $\bar{T}_q^L$ 是外载荷对应于独立坐标 $\bar{q}$ 的广义力,  $\bar{T}_q^S$ 是系统其他等值力因素(如弹簧、阻尼等)对应于独立坐标 $\bar{q}$ 的广义力, 则有

$$\bar{T}_q^I = -(\bar{T}_q^A + \bar{T}_q^L + \bar{T}_q^S) \quad (21)$$

其中 $\bar{T}_q^L$ 和 $\bar{T}_q^S$ 的计算参见文献[2]和[6]。为了获得平台给定的运动规律, 需要加在主动件上的驱动力为

$$\bar{T}_q^A = -(\bar{T}_q^L + \bar{T}_q^S + \bar{T}_q^I) \quad (22)$$

#### 4 运动控制方程的讨论

机器人在许多情况下, 需要在已知外力作用下, 求解其运动规律。这里将以简单的形式给出输入加速度与系统的外载荷和其他等值力对应于独立坐标 $\bar{q}$ 的广义力以及主动件的驱动力之间的显函数表达式, 这在系统的控制过程中是特别有用的。为此可将(20)式写成下列形式

$$\bar{T}_q^I = -\bar{T}_q^{ia} - \bar{T}_q^{iv} \quad (23)$$

这里 $\bar{T}_q^{ia}$ 和 $\bar{T}_q^{iv}$ 分别为加速度相关项和速度相关项。把此式代入(21)式可得

$$\bar{T}_q^{ia} + \bar{T}_q^{iv} = \bar{T}_q^A + \bar{T}_q^L + \bar{T}_q^S \quad (24)$$

由于广义惯性张量 $[I^*]$ 是对称的, 故有

$$\bar{T}_q^{ia} = [I^*] \bar{q} = \bar{T}_q^A + \bar{T}_q^L + \bar{T}_q^S - \bar{T}_q^{iv} \quad (25)$$

由此可导出输入加速度的显函数表达式

$$\bar{q} = [I^*]^{-1} (\bar{T}_q^A + \bar{T}_q^L + \bar{T}_q^S - \bar{T}_q^{iv}) \quad (26)$$

这里 $[I^*]$ 是非奇异矩阵。如果机构所受的外力和输入力已知, 给定机构的输入初始位移和速度, 由(26)式可以求出该瞬时的输入加速度。输入加速度求出后, 可通过数字积分求得下一时间间隔的输入速度和位移, 从而新的输入加速度值又可利用(26)式求出。这就解决了机构在给定外力作用下, 求解其运动规律的动力学反算问题。

#### 5 计算实例

一个六自由度并联机器人机构示于图 2。该机构的运动学尺寸和动力学参数为:  $l_a = 0.097\text{m}$ ,  $l_b = 0.119\text{m}$ , 平台的厚度  $\delta_c = 0.01\text{m}$ , 直径  $D_c = 0.291\text{m}$ , 密度  $\rho = 2.7 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ , 其他构件重量不计。主动件的初始角位移 $\bar{q}_0 = \{30^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 150^\circ, 270^\circ, 270^\circ\}^T$ , 输入角速度 $\bar{q} = \{-1, -1, 1, 1, -1, 1\}^T \text{1/sec}$ 。由(20)式计算出的六维广义力 $\bar{T}_q^I$ 如图 3 所示, 这个结果和用文[2]中的计算公式所得结果是一致的。

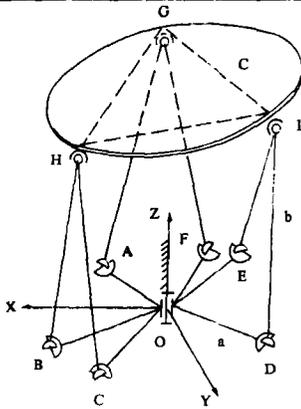


图2 6-RTS 并联机器人机构简图

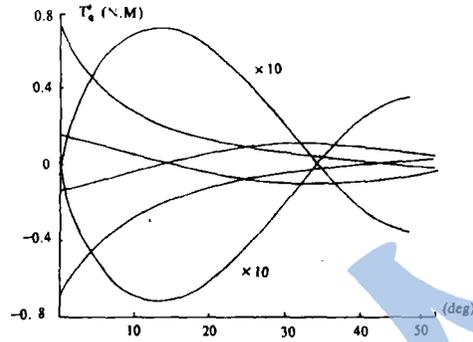


图3 六维广义力曲线

## 6 结论

1) 本文引入的广义惯性张量和广义惯性功率模型矩阵是一个内涵广泛的惯性物理量, 特别适用于多刚体系统的动力学研究。这是因为它是从总体上把所有构件的分布质量、构件的相互位置与广义运动分离开的质量位置函数。

2) 由于广义惯性张量和广义惯性功率模型矩阵的引入, 方便地建立起此多环复杂系统和拉格朗日动力学模型, 为并联式机器人的控制提供了数学模型。

## 参考文献

- 1 Huang Z. Modeling formulation of six-DOF multi-loop parallel manipulator: part 1—kinematic influence coefficient. In: Fourth IFToMM Symposium Linkage and CAD Design Methods, Romania, 1985; 2-1: 155-164
- 2 Huang Z. Modeling formulation of six-DOF multi-loop parallel manipulator: part 2—dynamic modeling and example. In: Fourth Symposium Linkage and CAD Design Methods, Romanis, 1985; 2-1: 164-170
- 3 Huang Z, Wang H B. Dynamic force analysis of six-DOF parallel multi-loop robot manipulators. ASME paper 86-DET-168
- 4 黄真, 王洪波. 复杂多环空间机构动力分析的影响系数法. 机械工程学报, 1988; 24(3): 74-80
- 5 Thomas M, Tesar D. Dynamic modeling of manipulator arm. Journal of Dynamic System Measurement and Control, 1982; 104: 218-228
- 6 Benedict C E, Tesar D. Modeling formulation of complex mechanisms with multiple inputs. Journal of Mechanism Design, 1978; 100: 747-761

# LANGRAGE'S DYNAMIC EQUATION OF SIX-DOF PARALLEL MULTI-LOOP ROBOT MANIPULATOR

WANG Hongbo HUANG Zhen

(Yanshan University, Qinhuandao)

## Abstract

Dynamics of Six-DOF parallel robot manipulator is studied in this paper. A general inertia tensor and a general inertia power modeling matrix depending only on mass distribution and system geometry are derived from the first-order and the second-order influence coefficient matrices. The Lagrange's dynamic equation and controlling equation of motion of the multi-loop complex system are established in simple explicit expressions. Finally, a numerical example is given.

**Keywords:** parallel multi-loop robot manipulator, dynamic equation, influence coefficient, inertia tensor.