

空间六自由度多回路机构位置的三维搜索方法

曲义远 黄真

(燕山大学机械二系, 秦皇岛)

摘要 本文以并联多回路6-SPS机构位置反解方程为基础, 得到了以非线性方程组形式表达的求解6-SPS机构位置正解的“三维优化算法”求解公式。与现有的该机构位置正解算法相比该方法使原来解搜索维数由六维降至三维, 因此, 具有计算速度快, 初值易于选取等优点。

关键词: 并联空间机构, 位置反解, 三维优化。

1 引言

并联多环机构由于结构复杂, 其运动学求解较串联式机构困难。文献[1、2]中给出了求解6-SPS机构位置反解的方法。而对于该机构的位置正解分析一直没有较为满意的解法, 作者曾以位置反解为基础, 直接对其进行六维优化搜索来求解其正解。由于求解维数较高, 必然会限制计算速度, 初值的选取也较困难。本文也是以位置反解方程为基础来求解, 但作者充分利用了机构具有的一些几何关系, 巧妙地化简了求解方程, 使求解的优化搜索维数降至三维, 这就使初值选取极为容易, 运算速度大大提高。

2 位置反解方程

6-SPS平台机构是六个自由度的空间机构(图1)。作为机器人臂使用时, 其操作器固定于上平台上。改变作为驱动器的六个杆的长度时, 上平台可有相应的确定运动。

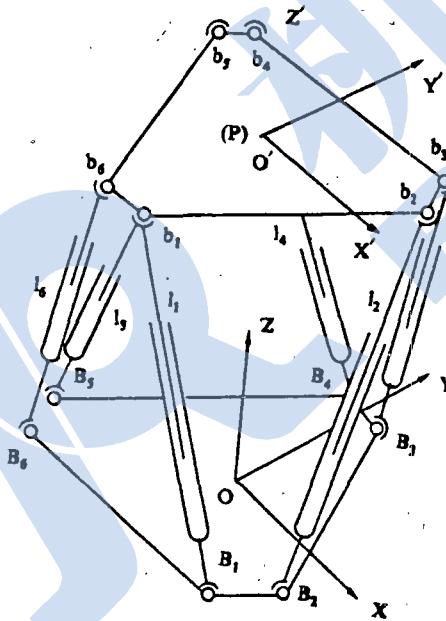


图1 6-SPS机构简图

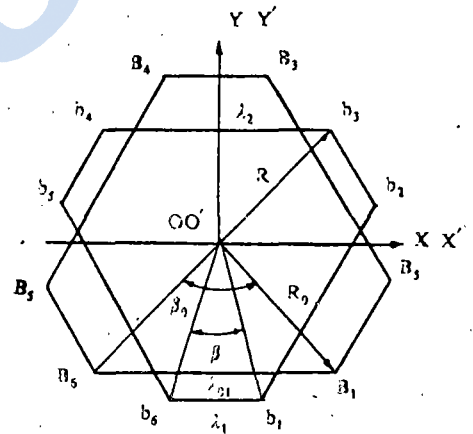


图2 上下平台坐标系的选取

首先在机构的上下平台上各建立一个坐标, 如(图2)动坐标系 $O'-X'Y'Z'$ 建立在上平台上, $O-XYZ$ 固定于下平台上。两坐标系之间存在如下关系:

$$\{\bar{x}\} = \{T\}\{\bar{x}'\} + \{D\} \quad (1)$$

收到本文的时间是1988年12月22日。本课题是国家自然科学基金资助项目。

这里 $[T]$ 为表示上平台姿态的方向余弦矩阵, $\{p\}$ 为上平台中心点 P 在固定坐标系中的矢量表示。

给出机构的各个结构尺寸后, 利用几何关系可以具体写出上下两平台各铰链点 $(b_i, B_i, i=1, \dots, 6)$ 在各自坐标系的坐标值⁽³⁾。由公式(1)即可求出上平台铰链点在固定坐标 $O-XYZ$ 中的坐标值。这时六个驱动器杆长在固定坐标系下的矢量表示为

$$\bar{l}_i = ([T]b_i - \bar{B}_i) \quad i=1, 2, \dots, 6 \quad (2)$$

展开上式

$$\{\bar{l}_i\} = \begin{bmatrix} d_{11}b'_{ix} + d_{12}b'_{iy} + x_p - B_{ix} \\ d_{21}b'_{ix} + d_{22}b'_{iy} + y_p - B_{iy} \\ d_{31}b'_{ix} + d_{32}b'_{iy} + z_p \end{bmatrix} \quad (3)$$

从而可以得到机构的位置反解计算方程

$$l_i = \sqrt{l_{ix}^2 + l_{iy}^2 + l_{iz}^2} \quad i=1, 2, \dots, 6 \quad (4)$$

这里式(4)是六个独立的显式方程, 当已知机构的基本尺寸和输出量即上平台位置和姿态, 就可直接求出输入量 l_i ($i=1, 2, \dots, 6$)。

然而当已知输入量 l_i , 是无法应用式(4)直接求得输出量, 只能通过数值方法求解。原来的“六维搜索算法”就是采用求解式(4)这组非线性方程进行的。下面我们以前(4)式为基础推导“三维搜索法”的求解公式。

3 三维方程的推导

将(4)式中六个方程分为三组即 (l_1^2, l_2^2) 、 (l_2^2, l_3^2) 、和 (l_3^2, l_4^2) , 在每组的两方程之间相加、相减, 并利用机构各铰链点坐标之间的关系和矩阵 $[T]$ 的性质, 会得到另外六个独立方程

$$\frac{l_{1+i}^2 - l_{6-i}^2}{4} = -x_p B_{ix} - d_{21} \cdot b'_{ix} \cdot B_{iy} - d_{12} b_{iy} B_{ix} + b_{ix} (\bar{D}_1 \cdot \bar{p}) \quad (5)$$

$$\frac{l_{1+i}^2 + l_{6-i}^2}{4} = R^2 + R_0^2 + P^2 - 2y_p B_{iy} - 2(d_{11} b'_{ix} B_{ix} + d_{22} b'_{iy} B_{iy}) + 2b_{iy} (\bar{D}_2 \cdot \bar{p}) \quad (6)$$

其中 $D_1 = (d_{11} \ d_{21} \ d_{31})^T$; $D_2 = (d_{12} \ d_{22} \ d_{32})^T$, $i=0, 1, 2$ 。

对于式(5), 当 $i=0, 1, 2$ 时, 得到三个式子(5-a), (5-b), (5-c), 用(5-a)-(5-b)-(5-c), 以及(5-a)(b'_{2x})-(5-b)(b'_{1x}), 并整理得以下两式

$$E_{11}d_{21} + E_{12}d_{12} = E_{13}x_p + E_{12} \quad (7-a)$$

$$E_{21}d_{21} + E_{22}d_{12} = E_{23}x_p + E_{22} \quad (7-b)$$

对于式(6), 当 $i=0, 1, 2$ 时, 得到三个式子(6-a), (6-b), (6-c), 用(6-a)+(6-b)+(6-c), 以及(6-a)(b'_{2y})-(6-c)(b'_{1y}), 并整理得以下两式

$$E_{31}d_{11} + E_{32}d_{22} = E_{33}y_p + E_{34}(R^2 + R_0^2 + p^2) + E_{35} \quad (7-c)$$

$$E_{41}d_{11} + E_{42}d_{22} = E_{43}y_p + E_{44}(R^2 + R_0^2 + p^2) + E_{45} \quad (7-d)$$

其中 $E_{ij}(i=1, 2, \dots, 4, j=1, \dots, 5)$ 只与输入量(杆长)和基本尺寸有关, 具体如下:

$$E_{11} = b_{1x} B_{1y} - b_{2x} B_{2y} + b_{3x} B_{3y}$$

$$E_{12} = b_{1y} B_{1x} - b_{2y} B_{2x} + b_{3y} B_{3x}$$

$$E_{13} = 0$$

$$E_{14} = (l_2^2 + l_4^2 + l_6^2 - l_1^2 - l_3^2 - l_5^2) / 4$$

$$E_{21} = b_{1x} B_{1y} b'_{2x} - b_{2x} B_{2y} b'_{1x}$$

$$E_{22} = b_{1y} B_{1x} b'_{2x} - b_{2y} B_{2x} b'_{1x}$$

$$E_{23} = B_{2x} b'_{1x} - B_{1x} b'_{2x}$$

$$E_{24} = [(l_2^2 - l_3^2) b'_{1x} - (l_1^2 - l_6^2) b'_{2x}] / 4$$

$$E_{31} = 2 \cdot (b_{1x} B_{1x} + b_{2x} B_{2x} + b_{3x} B_{3x})$$

$$E_{32} = 2 \cdot (b_{1y} B_{1y} + b_{2y} B_{2y} + b_{3y} B_{3y})$$

$$E_{33} = 0 ; E_{34} = 3$$

$$E_{35} = 3 \cdot (R^2 + R_0^2) - (\sum l_i^2) / 2$$

$$E_{41} = 2 \cdot (b'_{1x} B_{1x} b'_{2y} - b'_{2x} B_{2x} b'_{1y})$$

$$E_{42} = 2 \cdot (b'_{1y} B_{1y} b'_{2y} - b'_{2y} B_{2y} b'_{1y})$$

$$E_{43} = 2 \cdot (B_{2y} b'_{1y} - B_{1y} b'_{2y})$$

$$E_{44} = b'_{2y} - b'_{1y}$$

$$E_{45} = (R^2 + R_0^2)(b'_{2y} - b'_{1y}) - [(l_1^2 + l_0^2)b'_{2y} - (l_2^2 + l_3^2)b'_{1y}] / 2$$

上面得到了四个独立的线性方程组(7)，它们是由每组内的三个方程(5-a,b,c)和(6-a,b,c)分别导出的，每组中给出了两个独立方程，所以组内必然还存在一个独立方程，因此，可以从每组中任意选取一个方程，与上面的四个方程组成的方程组，也是相互独立的。我们从(5)式中取方程(5-c)，从(6)式中取方程(6-c)，即

$$\frac{l_3^2 + l_4^2}{2} = R^2 + R_0^2 + P^2 - 2y_p B_{3y} - 2(d_{11} b'_{3x} B_{3x} + d_{22} b'_{3y} B_{3y}) + 2b'_{3y} (\bar{D}_2 \cdot \bar{p}) \quad (8-a)$$

$$\frac{l_3^2 - l_4^2}{4} = -x_p B_{3x} - d_{21} b'_{3x} B_{3y} - d_{12} b'_{3y} B_{3x} + b'_{3x} (\bar{D}_1 \cdot \bar{P}) \quad (8-b)$$

另外，我们还有约束方程

$$d_{11} \cdot d_{12} + d_{21} \cdot d_{22} + d_{31} \cdot d_{32} = 0 \quad (8-c)$$

式(8)的三个方程，就是我们用于位置求解的非线性方程组，在这三个方程中，未知数只有 x_p, y_p, z_p ，因为方程中的所有表示姿态的方向余弦值 d_{ij} 均可由 x_p, y_p, z_p 来显式表示，具体形式如下：

由线性方程组(7-a,b)可得

$$d_{21} = N_1 x_p + M_1 \quad (9-a)$$

$$d_{12} = N_2 x_p + M_2 \quad (9-b)$$

由线性方程组(7-c, d)可得

$$d_{11} = L_1 y_p + K_1 p^2 + J_1 \quad (10-a)$$

$$d_{22} = L_2 y_p + K_2 p^2 + J_2 \quad (10-b)$$

由方向余弦性质有

$$d_{11} = \pm \sqrt{1 - d_{12}^2 - d_{21}^2} \quad (11-a)$$

$$d_{32} = \pm \sqrt{1 - d_{12}^2 - d_{22}^2} \quad (11-b)$$

式(9)和式(10)中的量 N_i, M_i, L_i, K_i, J_i 在 E_{ij} 求得后可通过式(7)求得。可以证明，只要机构是非几何奇异形， N_i, M_i, L_i, K_i, J_i 都有确定的解，对于几何奇异形机构，由文献[3]可知，它是不稳定机构，而且它的不稳定性是与机构位置无关的，所以它是没有确定的位置正解的。

4 目标函数的建立

当机构的基本结构尺寸 $RR, \beta\beta$ 已知，给出输入是 $l_i (i=1,2,\dots,6)$ 后， $E_{ij}, N_i, M_i, K_i, J_i, L_i$ 均可求出，再将式(9)、(10)和(11)各项代入式(8)后，我们就得到了只含三维变量 (x_p, y_p, z_p) 的三个非线性方程组

$$F_1 = (l_3^2 + l_4^2) / 2 - (R^2 + R_0^2) - p^2 - 2y_p B_{3y} + 2(d_{11} b'_{3x} B_{3x} + d_{22} b'_{3y} B_{3y}) - 2b'_{3y} (d_{12} x_p + d_{22} y_p + d_{32} z_p) = 0 \quad (12-a)$$

$$F_2 = (l_3^2 - l_4^2) / 4 + x_p B_{3x} + d_{21} b'_{3x} B_{3y} + d_{12} b'_{3y} B_{3x} - b'_{3x} (d_{11} x_p + d_{21} y_p + d_{31} z_p) = 0 \quad (12-b)$$

$$F_3 = d_{11} \cdot d_{12} + d_{21} \cdot d_{22} + d_{31} \cdot d_{32} \quad (12-c)$$

采用优化理论求解这组方程组，其目标函数采用最小二乘原理构成。

$$S_{(x,y,z)} = \sum_{i=1}^3 F_i^2(x,y,z) \quad (13)$$

式(13)即是我们要求解位置正解的目标函数。

5 程序设计

前面我们已经建立了“三维搜索”的目标函数值,为得到较为满意的计算结果,在编制程序时对目标函数作如下处理:

(1) 考虑到三个分目标函数的量级和量纲的一致,选取一加权因子 qd , 使目标函数为

$$S = F_1^2 + F_2^2 + qd \cdot F_3^2 \quad (14)$$

(2) 式(11)的 d_{31} 、 d_{32} 都有正负两个值,它的符号的选取由程序本身来完成。将式(12)中 F_1 、 F_2 的表达式分别用两项之差的形式给出,其中第一项是方程中不包括 d_{31} 或 d_{32} 的所有其它量,式(12)可改写成

$$F_1 = A_1 - d_{3x} z_p b'_{3y} = 0 \quad (15-a)$$

$$F_2 = A_2 - d_{32} y_p b_{3x} = 0 \quad (15-b)$$

显然 z_p 应是一个大于零的值,由机构的结构及坐标选取方式决定,无论机构的基本参数如何选取, b'_{3x} 、 b'_{3y} 将总是大于零,所以 d_{31} 、 d_{32} 的符号应分别取与 $A_2 A_1$ 的符号一致。

(3) 优化计算的终止准则可有多种方式给出,对于由最小二乘法构成的目标函数,较合理的终止计算判别准则应为

$$|S_k| \leq \epsilon \quad (16)$$

其中 S_k 是第 k 次搜索后的目标函数, ϵ 是一个预先给定的控制精度。

作者编制了计算程序,并在 VAX780 小型机上调试通过。

6 计算举例

设结构基本尺寸为 $R = R_0 = 100\text{mm}$, $\beta = 30^\circ$, $\beta_0 = 90^\circ$ 的并联多环机构,求当 $l_i = 200 (i=2, \dots, 5)$, l_1 由 20mm — 290mm 变化时,上平台的位置与姿态的变化。

机构上的坐标选取形式与图(1、2)完全相同,上平台的位置由上平台中心点坐标 x_p, y_p, z_p 来表示,其姿态采用欧拉角来表示,加权因子 qa 取 $(R^2 + R \cdot R_0)$, 计算结果如图 3 曲线所示。

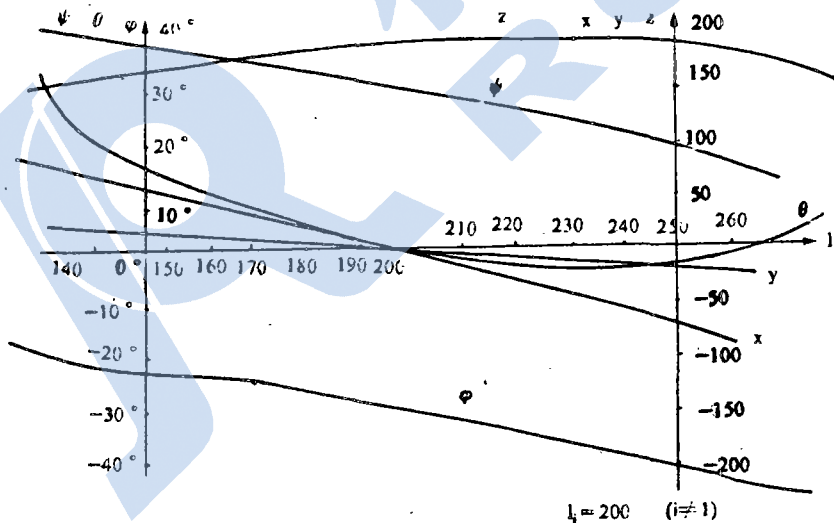


图 3 上平台位置与姿态变化曲线

7 结论

并联多回路机构的位置正解虽然是一个比较难于解决的问题,但通过本文的研究所提出的“三维优化算法”具有方法简单,编程方便计算速度快,求解精度高,特别是计算初值极容易选取的特点。这一方法为需要应用位置正解的其它分析工作提供了有力工具。

参 考 文 献

- 1 Fichter E F. Kinematics of a parallel connection manipulator. ASME Paper 84-DET-45
- 2 Yang D C H, Lee T W. Feasibility study of a platform type of robotic manipulators from a viewpoint. Journal of Mechanism, Transmission and Automation in Design, 1984, 106: 191-198
- 3 黄 真, 曲义远. 空间并联多环机构的特殊位形分析. 东北重型机械学院学报, 1989; 13(2): 1-6

THREE-DIMENSIONAL OPTIMIZATION ALGORITHM OF SIX-DOF MULTI-LOOP SPATIAL MECHANISM

QU Yiyuan HUANG Zhen

(Yanshan University, Qinhuandao)

Abstract

Three-dimensional optimization algorithm of the position solution about the six-SPS mechanism is obtained in this paper. The algorithm is based on the inverse solution of the positional problem in the form of nonlinear equations. As contrasted with the original algorithm of the mechanical positional solution, this new method reduces former six-dimensional optimization to three-dimensional optimization. Therefore, the calculating speed is fast enough and the initial value of the method can be chosen easily.

Keywords: parallel spatial mechanism, position inverse solution, three-dimensional optimization.

(上接第 24 页)

INFLUENCE COEFFICIENT MATRICES AND APPLICATION OF PARALLEL 6-SPS ROBOT MANIPULATOR

TAN Fanzhong

(Heilongjiang College of Heavy-duty Machinery, Fulaerqi)

WANG Hongbo HUANG Zhen

(Mechanical Dept., Yanshan University, Qinhuandao)

Abstract

In accordance with the character of parallel robot manipulator, and by direct derivation for position inverse solution, the first-order and second-order influence coefficient matrices of a parallel 6-SPS robot manipulator are established. And the problem of the velocity and acceleration analysis are thus solved, which lays a foundation for error and dynamic analysis. The first-order and second-order influence coefficient matrices derived here are in simple and uniform expression, and are suitable for computer calculation. Finally, a numerical example is given.

Keywords: parallel robot manipulator, influence coefficient, velocity analysis, acceleration analysis.